ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

TOME XXIII
ANNÉE 1950

KRAKÓW 1950

ROCZNIK POLSKIEGO TOW. MATEMATYCZNEGO

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE

FONDÉES EN 1921 par STANISŁAW ZAREMBA

TOME XXIII

ANNÉE 1950

KRAKÓW 1950



PRINTED IN POLAND

*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

*

Reprodukcja fotooffsetowa, 1965
Zakład Graficzny PWN, Łódź

Table des matières

ON AN ANALOGY BETWEEN MEASURES AND HOMOMORPHISMS

By
ROMAN SIKORSKI (Warszawa)

Let T^* be a theorem (from the general theory of measure) which expresses a property P^* of an arbitrary measure defined on a Boolean algebra (or: on a field of sets) $\boldsymbol{A}$. Theorem T^*, true for arbitrary measures, holds, in particular, for two-valued measures. It is clear that the notion of a two-valued measure coincides[1]) with the notion of a two-valued homomorphism of $\boldsymbol{A}$ in a Boolean algebra $\boldsymbol{B}$. Thus the theorem T^* expresses a property P of two-valued homomorphisms. The question arises whether other homomorphisms of $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ possess also the property P. If we shall prove that the class of homomorphisms with the property P is wider than the class of two-valued homomorphisms, we shall have a new theorem T on homomorphisms between Boolean algebras.

This paper contains several theorems on homomorphisms obtained by the mentioned method. I shall cite known theorems from the general theory of measure and I shall formulate and prove analogous theorems on homomorphisms.

---

[1]) The definition of a measure and of a homomorphism is given in *Terminology and notation*. A measure μ is *two-valued* if it assumes only two values: the numbers 0 and 1. A homomorphism h of $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ is *two-valued* if it assumes only the two following values: the minimal element $0 \in \boldsymbol{B}$ and the maximal element $E \in \boldsymbol{B}$ (i. e. $B+0=B=BE$ for every $B \in \boldsymbol{B}$; we suppose $E \neq 0$). If μ is a two-valued measure on $\boldsymbol{A}$, then the formulas

(i) $$h(A)=0 \quad \text{if} \quad \mu(A)=0$$

(ii) $$h(A)=E \quad \text{if} \quad \mu(A)=1$$

define a two-valued homomorphism of $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$. Conversely, if h is a two-valued homomorphism, the formulas (i)-(ii) define a two-valued measure μ on $\boldsymbol{A}$.

The proof of these theorems on homomorphisms is, in general, simpler than the proof of the corresponding theorems on measures.

I. Finitely additive homomorphisms.

Terminology and notation. In the first part of this paper $\mathbf{A}$ denotes always an arbitrary Boolean algebra. Elements of $\mathbf{A}$ are denoted by the letters $A, B, \ldots$

$A+B$, AB, and A^0 denote Boolean operations analogous to the addition, multiplication, and complementation of sets in the general theory of sets. By definition $A^1 = A$ for any $A \epsilon \mathbf{A}$. 0 denotes the null element of $\mathbf{A}$, i. e. $0 + A = A$ for every $A \epsilon \mathbf{A}$.

A set $\mathbf{A}_0$ of elements of $\mathbf{A}$ is called a *subalgebra* of $\mathbf{A}$ if $A + A_1 \epsilon \mathbf{A}_0$ and $A^0 \epsilon \mathbf{A}_0$ for any $A, A_1 \epsilon \mathbf{A}_0$. Every subalgebra is also a Boolean algebra. The least subalgebra of $\mathbf{A}$ containing a given class $\mathbf{K} \subset \mathbf{A}$ will be denoted by $\mathbf{K}_s$.

A mapping h of $\mathbf{A}$ in a Boolean algebra $\mathbf{B}$ is called a *homomorphism* of $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ if

$$h(A + A_1) = h(A) + h(A_1) \text{ and } h(A^0) = h(A)^0$$

for any $A, A_1 \epsilon \mathbf{A}$. A one-one homomorphism of $\mathbf{A}$ on $\mathbf{B}$ is called an *isomorphism*. If it exists, $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are *isomorphic*.

A real function μ defined on $\mathbf{A}$ is called a *measure* if[2])

$$\mu(0^0) = 1 \text{ and } \mu(A + A_1) = \mu(A) + \mu(A_1)$$

for any $A, A_1 \epsilon \mathbf{A}$, $AA_1 = 0$.

A mapping f of a set M in a set N is called an *extension* of a mapping f_0 of a set $M_0 \subset M$ in N if $f(e) = f_0(e)$ for every $e \epsilon M_0$.

1. ***Extending of homomorphisms.*** The following example explains more exactly the method mentioned in the introduction. Consider the following known theorem on the extending of measures:

---

[2]) 0^0 is the maximal element of $\mathbf{A}$.

(*)[3]) *Every measure μ_0 defined on a subalgebra A_0 of A can be extended to a measure μ on A. Moreover, one may assume that*[4]) $\mu(A) \subset \overline{\mu_0(A_0)}$.

In particular, every two-valued measure on A_0 can be extended to a two-valued measure on A. In other words, every two-valued homomorphism defined on A_0 can be extended over A. The question arises whether every homomorphism of A_0 in a Boolean algebra B can be extended over A. The affirmative answer to this question (under the assumption that B is complete) is given by the following

Theorem I.[5]) *Every homomorphism of a subalgebra $A_0 \subset A$ in a complete Boolean algebra B can be extended to a homomorphism of A in B.*

2. ***Extending of a mapping to a homomorphism.*** Horn and Tarski[6]) have formulated a necessary and sufficient condition so that a real function ν defined on a subset K of a Boolean algebra A ($0 \leqslant \nu(A) \leqslant 1$ for $A \epsilon K$) can be extended to a measure on A. An analogous problem may be considered for homomorphisms. The necessary and sufficient condition for homomorphisms is simpler than that for measures. Namely:

Theorem II.[7]) Let *K be a class of elements of A and let f be a mapping of K in a Boolean algebra B. The mapping f can be extended to a homomorphism h of K_s in B if and only if*

(i) $A_1^{a_1} \cdot \ldots . A_n^{a_n} = 0$ *implies* $f(A_1)^{a_1} \cdot \ldots . \cdot f(A_n)^{a_n} = 0$

for every two sequences $A_i \epsilon K$ and $a_i = 0$ or 1 ($i = 1, 2, \ldots, n$).

The necessity is evident.

Suppose that (i) is satisfied. Every element $A \epsilon K_s$ can be represented in the form:

[3]) See e. g. Łoś and Marczewski [1] p. 270; Horn and Tarski [1], p. 477 (Theorem 1.22).

[4]) $\mu(A)$ and $\mu_0(A_0)$ denote the sets of values assumed by μ and μ_0 respectively. $\overline{\mu_0(A_0)}$ is the topological closure of $\mu_0(A_0)$.

[5]) Proved in my paper [2].

[6]) Horn and Tarski [1], p. 477.

[7]) A similar theorem on the extending of a mapping to an isomorphisms has been proved by Kuratowski and Posament [1], p. 282.

(ii) $$A = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} A_{i,j}^{\alpha_{i,j}}$$

where $A_{i,j} \in K$ and $\alpha_{i,j} = 0$ or 1. If

$$\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} A_{i,j}^{\alpha_{i,j}} = \sum_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{q_k} B_{k,l}^{\beta_{k,l}}$$

where $B_{k,l} \in K$ and $\beta_{k,l} = 0$ or 1, then

$$(\sum_{i=1}^{m} \prod_{i=1}^{n_i} A_{i,j}^{\alpha_{i,j}}) . (\sum_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{q_k} B_{k,l}^{\beta_{k,l}})^0 =$$

$$= \sum_{\{l_k\}} \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{k=1}^{p} A_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \cdot B_{k,l_k}^{1-\beta_{k,l_k}} = 0$$

where $\{l_k\}$ is an arbitrary sequence of integers such that $1 \leqslant l_k \leqslant q_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$. By (i)

$$\sum_{\{l_k\}} \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{k=1}^{p} f(A_{i,j})^{\alpha_{i,j}} \cdot f(B_{k,l_k})^{1-\beta_{k,l_k}} = 0,$$

hence

$$(\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} f(A_{i,j})^{\alpha_{i,j}}) \cdot (\sum_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{q_k} f(B_{k,l})^{\beta_{k,l}})^0 = 0.$$

Analogously

$$(\sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} f(A_{i,j})^{\alpha_{i,j}})^0 \cdot (\sum_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{q_k} f(B_{k,l})^{\beta_{k,l}}) = 0.$$

Consequently

$$\sum_{i=1}^{m} \prod_{i=1}^{n_i} f(A_{i,j})^{\alpha_{i,j}} = \sum_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{q_k} f(B_{k,l})^{\beta_{k,l}}.$$

Thus we infer that the element

(iii) $$h(A) = \sum_{i=j}^{m} \prod_{j=1}^{n_i} f(A_{i,j})^{\alpha_{i,j}}$$

does not depend on the representation of the element $A \in K_s$ in the form (ii).

The formula (iii) defines a homomorphism h of K_s in B which is an extension of the mapping f.

3. Collections of independent subalgebras. A collection $\{A_\tau\}_{\tau\epsilon T}$ of subalgebras of A is called a *collection of independent subalgebras* of A if

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \neq 0$$

for every sequence $A_i \epsilon A_{\tau_i}$, $A_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ \tau_i \neq \tau_j$ for $i \neq j)$.

Marczewski[8]) has proved the following theorem:

(*) Let $\{A_\tau\}_{\tau\epsilon T}$ *be a collection of subalgebras of* A *and (for every* $\tau\epsilon T$*) let* μ_τ *be a measure defined on* A_τ. *In order that there exist a measure* μ *on the least subalgebra* $A_0 \subset A$ *containing all subalgebras* A_τ $(\tau\epsilon T)$ *and such that*

(i) μ *is a common extension of all measures* μ_τ $(\tau\epsilon T)$;

(ii) *for every sequence* $A_i \epsilon A_{\tau_i} (1 \leqslant i \leqslant n,\ \tau_i \neq \tau_j$ *for* $i \neq j)$

$$\mu(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mu(A_i);$$

it is necessary and sufficient that for every sequence $A_i \epsilon A_{\tau_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ \tau_i \neq \tau_j$ *for* $i \neq j)$:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = 0 \quad \textit{imply} \quad \prod_{i=1}^{n} \mu_{\tau_i}(A_i) = 0.$$

Consequently, if $\{A_\tau\}_{\tau\epsilon T}$ *is a collection of independent subalgebras of* A, *the measure* μ *satisfying* (i) *and* (ii) *exists always for arbitrary measures* μ_τ *on* A_τ.

The analogous theorem on homomorphisms can be formulated as follows:

Theorem III. Let $\{A_\tau\}_{\tau\epsilon T}$ *be a collection of subalgebras of* A, *and (for every* $\tau\epsilon T$*) let* h_τ *be a homomorphism of* A_τ *in a Boolean algebra* B. *In order that there exist a common extension* h *of all homomorphisms* h_τ *over the least subalgebra* A_0 *containing all subalgebras* A_τ $(\tau\epsilon T)$, *it is necessary and sufficient that for every sequence* $A_i \epsilon A_{\tau_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ \tau_i \neq \tau_j$ *for* $i \neq j)$:

(iii) $$\prod_{i=1}^{n} A_i = 0 \quad \textit{imply} \quad \prod_{i=1}^{n} h_{\tau_i}(A_i) = 0.$$

---

[8]) Marczewski [2], p. 126—127 (Theorems II and III).

Consequently, if $\{A_\tau\}_{\tau \in T}$ *is a collection of independent subalgebras of* A*. the common extension* h *exists always for arbitrary homomorphisms* h_τ *of* A_τ *in* B.

The necessity is obvious. The sufficiency follows from Theorem II. In fact, if $A \in A_{\tau_1}$ and $A \in A_{\tau_2}$, then by (iii)

$$h_{\tau_1}(A) \cdot h_{\tau_2}(A)^0 = 0 = h_{\tau_1}(A)^0 \cdot h_{\tau_2}(A)$$

since $AA^0 = 0$, $A^0 \in A_{\tau_1}$, and $A^0 \in A_{\tau_2}$. Hence $h_{\tau_1}(A) = h_{\tau_2}(A)$. Therefore there exists a mapping f of the class $K = \sum_{\tau \in T} A_\tau$ in B such that

$$f(A) = h_\tau(A) \quad \text{for} \quad A \in A_\tau.$$

Since (iii) implies the condition (i) of Theorem II, there exists a homomorphism h of $K_s = A_0$ in B which is an extension of f, i. e. a common extension of all h_τ.

The second part of Theorem III follows directly from the first and the definition of a collection of independent subalgebras.

The condition (ii) expresses the so-called *stochastic independence* [9]) of the sequence $\{A_i\}$. The analogous condition for homomorphisms: $h(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} h(A_i)$ is always satisfied. Therefore it is omitted in Theorem III.

4. Classes of independent elements. A subset K of A is called a *class of independent elements* if $\prod_{i=1}^{n} A_i^{\alpha_i} \neq 0$ for every two sequences $A_i \in K$ ($A_i \neq A_j$ for $i \neq j$) and $\alpha_i = 0$ or 1 $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

It follows from theorem (*) in § 3 that [10])

(*) *Every non-negative function* $\nu(A) \leqslant 1$ *defined on a class* K *of independent elements of* A *can be extended to a measure on* K_s.

---

9) See Marczewski [2]. p. 126.

10) See Fichtenholz-Kantorovitch [1], p. 72 and p. 78, Marczewski [2], p. 125, and Marczewski [3], p. 18.

The analogous theorem on homomorphisms is

Theorem IV. Let $\mathbf{K}$ *be a class of independent elements of* $\mathbf{A}$. *Every mapping* f *of* $\mathbf{K}$ *in a Boolean algebra* $\mathbf{B}$ *can be extended to a homomorphism of* $\mathbf{K}_s$ *in* $\mathbf{B}$.

Theorem IV follows immediately from Theorem II.

II. Infinitely additive homomorphisms.

Terminology, notation, and lemmas. In the second part of this paper $\mathbf{A}$ denotes always a σ-complete Boolean algebra. The sum of an enumerable sequence $A_n \epsilon \mathbf{A}$ is denoted by $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, the product by $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$.

Let $\mathbf{A}_0$ be a subalgebra of $\mathbf{A}$.

A homomorphism h of $\mathbf{A}_0$ in a σ-complete Boolean algebra $\mathbf{B}$ is called a *σ-homomorphism* if for every sequence [11] $A_n \epsilon \mathbf{A}_0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \epsilon \mathbf{A}_0 \quad \text{implies} \quad h\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} h(A_n).$$

The necessary and sufficient condition for a homomorphism h to be a σ-homomorphism is that for every sequence $A_n \epsilon \mathbf{A}_0$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0 \quad \text{imply} \quad \prod_{n=1}^{\infty} h(A_n) = 0.$$

A measure μ on $\mathbf{A}_0$ is called a *σ-measure* if the conditions:

$$A_n \epsilon \mathbf{A}_0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \epsilon \mathbf{A}_0, \quad A_i A_j = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j,$$

imply

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

The necessary and sufficient condition for a measure μ to be a σ-measure is that

---

[11]) If $A_n \epsilon \mathbf{A}$, the symbol $\sum_n A_n$ denotes always the Boolean sum of A_n *in the Boolean algebra* $\mathbf{A}$. Analogously for $\prod_n A_n$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0 \quad \text{imply} \quad \lim_{n=\infty} \mu(A_n) = 0$$

for any decreasing sequence $A_n \in A_0$.

A subalgebra A_0 of A is called a *σ-subalgebra* of A if $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in A_0$ for every sequence $A_n \in A_0$. Every σ-subalgebra is also a σ-complete Boolean algebra. The least σ-subalgebra of A containing a given class $K \subset A$ will be denoted by K_σ.

Lemma[12]) *A). Let f be a mapping of an infinite set $K_0 \subset A$ in a σ-complete Boolean algebra B. If for every enumerable set $K \subset K_0$ there exists a σ-homomorphism h_K of K_σ in B such that $h_K(A) = f(A)$ for every $A \in K$, then there exists a σ-homomorphism h of $K_{0\sigma}$ in B which is an extension of f.*

We shall prove first that:

(i) If K' and K are enumerable subsets of K_0 and $K' \subset K$, then $h_K(A) = h_{K'}(A)$ for every $A \in K'_\sigma$.

In fact, the set S of all elements $A \in K'_\sigma$ such that $h_K(A) = h_{K'}(A)$ is a σ-subalgebra of A and $K' \subset S$. Consequently $K'_\sigma = S$.

(ii) If K' and K'' are enumerable subsets of K_0 and $A \in K'_\sigma \cdot K''_\sigma$, then $h_{K'}(A) = h_{K''}(A)$.

Let $K = K' + K''$. By (i) $h_{K'}(A) = h_K(A) = h_{K''}(A)$.

Since $K_{0\sigma}$ is the sum of all subalgebras K_σ where K is an enumerable subset of K_0, it follows from (ii) that there exists a mapping h of $K_{0\sigma}$ in B such that

$$h(A) = h_K(A) \quad \text{for} \quad A \in K$$

where K is any enumerable subset of K_0.

Obviously h is an extension of f. If $A_n \in K_{0\sigma}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ there exists an enumerable subset $K \subset K_0$ such that $A_n \in K_\sigma$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

[12]) An analogous lemma holds for σ-measures.

Consequently

$$h(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = h_K(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} h_K(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} h(A_n)$$

and

$$h(A_1^0) = h_K(A_1^0) = h_K(A_1)^0 = h(A_1)^0.$$

Thus h is a σ-homomorphism of K_0 in B. Lemma A) is proved.

Let X be a σ-field[13]) of subsets of a set $\mathfrak{X}$ and let I be a σ-ideal[14]) of X. For every $X \epsilon X$ the symbol $[X]_I$ denotes the class of all sets $X' \epsilon X$ such that $(X - X') + (X' - X) \epsilon I$. The collection X/I of all $[X]_I$, where $X \epsilon X$, is a σ-complete Boolean algebra with the following definition of Boolean operations[15]):

$$\sum_n [X_n] = [\sum_n X_n], \quad \prod_n [X_n] = [\prod_n X_n], \quad [X]^0 = [X^0].$$

$\mathcal{C}$ denotes always Cantor's discontinuous set, i. e. the set of all numbers

$$c = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

where $a_n = 0$ or 1. The symbol $\mathcal{C}_n$ denotes the set of all $c \epsilon \mathcal{C}$ such that $a_n = 1$.

C denotes always the field of all both open and closed subsets of $\mathcal{C}$. C_σ is the σ-field of all Borel subsets of $\mathcal{C}$.

For every set $Z \subset \mathcal{C}$ the symbol ZC denotes the field of all sets ZC where $C \epsilon C$. Analogously, ZC_σ is the

---

[13]) I. e. a class X of sets $X \subset \mathfrak{X}$ such that: 1^0 if $X_n \epsilon X$ $(n = 1, 2, \ldots)$, then $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \epsilon X$; 2^0 if $X \epsilon X$, then $X^0 = \mathfrak{X} - X \epsilon X$.

[14]) I. e. a class $I \subset X$ such that: 1^0 if $X_n \epsilon I$ $(n = 1, 2, \ldots)$, then $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \epsilon I$; 2^0 if $X \epsilon I$ and $X_1 \subset X$ $(X_1 \epsilon X)$, then $X_1 \epsilon I$.

[15]) $\sum_n [X_n]$ does not denote here the union of the classes $[X_n]$, but the Boolean sum of elements $[X_n] \epsilon X/I$. Similarly for the product and the complement.

σ-field of all sets ZC where $C \in C_\sigma$, i. e. ZC_σ is the σ-field of all Borel subsets of the space Z.

If J is a σ-ideal of C_σ, the symbol $[C]_J$ denotes the class of all elements $[C]_J \in C_\sigma/J$ where $C \in C$. $[C]_J$ is a subalgebra of C_σ/J.

Lemma B). For every sequence $\{A_n\}$ of elements of A, there exists a σ-homomorphism g of C_σ in A such that $g(\mathcal{C}_n) = A_n$.

We may suppose[16]) that $A = X/I$ where X is a σ-field of subsets of a set $\mathcal{X}$ and I is a σ-ideal of X. Let $X_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ be a set such that $A_n = [X_n]_I$.

The characteristic function[17]) $\varkappa$ of the sequence $\{X_n\}$ maps $\mathcal{X}$ in $\mathcal{C}$ so that $\varkappa^{-1}(\mathcal{C}_n) = X_n$.

The formula

$$g(C) = [\varkappa^{-1}(C)]_I \quad \text{for } C \in C_\sigma$$

defines a σ-homomorphism of C_σ in A such that

$$g(\mathcal{C}_n) = [\varkappa^{-1}(\mathcal{C}_n)]_I = [X_n]_I = A_n.$$

Lemma C). Let J_1 and J_2 be two σ-ideals of C_σ. If every closed set $F \in J_1$ belongs to[18]) J_2, the formula

(iii) $$f([C]_{J_1}) = [C]_{J_2} \quad \text{for } C \in C_\sigma$$

defines a σ-homomorphism of $[C]_{J_1} \subset C_\sigma/J_1$ in C_σ/J_2.

If there exists a σ-homomorphism h of C_σ/J_1 in C_σ/J_2 which is an extension of f, then[19]) $J_1 \subset J_2$.

---

[16]) Since every σ-complete Boolean algebra is isomorphic to a quotient algebra X/I where X is a σ-field and I is a σ-ideal. See Loomis [1], p. 757 and Sikorski [1], p. 256.

[17]) I. e. the function

$$\varkappa(x) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

where $a_n = 1$ if $x \in X_n$ and $a_n = 0$ if $x \in X_n^0$. See Marczewski [1], p. 211-212.

[18]) This condition is also necessary for (iii) to define a σ-homomorphism of $[C]_{J_1}$ in C_σ/J_2.

[19]) This condition is also sufficient in order that there exist an extension of f over C_σ/J_1.

It is clear that (iii) defines a homomorphism f of $[C]_{J_1}$ in C_σ/J_2. If $C_n \in C$ and $\prod_{n=1}^{\infty} [C_n]_{J_1} = 0$, then the closed set $\prod_{n=1}^{\infty} C_n \in J_1$. Consequently $\prod_{n=1}^{\infty} C_n \in J_2$ and

$$\prod_{n=1}^{\infty} f([C_n]_{J_1}) = \prod_{n=1}^{\infty} [C_n]_{J_2} = 0,$$

i. e. f is a σ-homomorphism.

If h is an extension of f over C_σ/J_1, then

$$h([C]_{J_1}) = [C]_{J_2} \quad \text{for every } C \in C_\sigma.$$

If $C \in J_1$, then

$$[C]_{J_2} = h([C]_{J_1}) = h(0) = 0,$$

i. e. $C \in J_2$. Consequently $J_1 \subset J_2$.

Lemma D). Let $0 \neq Z \subset \mathcal{C}$ and let J be an σ-ideal of C_σ which contains every closed set $F \subset \mathcal{C}$, such that $FZ = 0$. Then the formula

(iv) $$g(ZC) = [C]_J \quad \textit{for any } C \in C$$

defines a σ-homomorphism g of ZC in C_σ/J. If there exists a set $C_0 \in C_\sigma$ such that $ZC_0 = 0$ and C_0 non $\in J$, the homomorphism g cannot be extended to a σ-homomorphism of $(ZC)_\sigma = ZC_\sigma$ in C_σ/J.

Let J_1 be the σ-ideal of all sets $C \in C_\sigma$, $ZC = 0$. The formula

$$\bar{g}([C]_{J_1}) = ZC \text{ for } C \in C_\sigma$$

defines an isomorphism $\bar{g}$ of C_σ/J_1 on ZC_σ such that $\bar{g}([C]_{J_1}) = ZC$.

Since every closed set $F \in J_1$ belongs to J, the formula (iii) (where $J_2 = J$) defines a σ-homomorphism of $(C)_{J_1}$ in C_σ/J on account of C), and consequently $g = f\bar{g}^{-1}$ is a σ-homomorphism of ZC in C_σ/J.

Suppose that there exists a set $C_0 \in J_1 - J$ and that g can be extended to a σ-homomorphism h of ZC_σ in C_σ/J_1. Then hg is an extension of f over C_σ/J_1. Hence, by Lemma C), $J_1 \subset J$, which is impossible.

5. Extending of a mapping to a σ-homomorphism. The subject of this section is the following problem[20]):

f is a mapping of a set $K \subset A$ in a σ-complete Boolean algebra B. When is it possible to extend the mapping f to a σ-homomorphism of K_σ in B?

In the case where B is a σ-field of sets, the answer is given by the following

Theorem V. A mapping f of a set $K \subset A$ in a σ-field of sets B can be extended to a σ-homomorphism h of K_σ in B if and only if for every sequence $A_n \in K$ $(n=1, 2, \ldots)$ and for every sequence $a_n = 0$ or 1 $(n=1, 2 \ldots)$:

$$\text{(i)} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} A_n^{a_n} = 0 \quad \textit{implies} \quad \prod_{n=1}^{\infty} f(A_n)^{a_n} = 0$$

The necessity is obvious. By Lemma A) we must prove the sufficiency of (i) only in the case where the set $K = (A_1, A_2 \ldots)$ is enumerable[21]). By Lemma B) there exists a σ-homomorphism g of C_σ in A such that $g(\mathcal{C}_n) = A_n$. Let J be the σ-ideal of all sets $C \in C_\sigma$ such that $g(C) = 0$. Then the formula

$$\bar{g}([C]_J) = g(C) \quad \text{for } C \in C_\sigma$$

defines an isomorphism of C_σ/J on K_σ and $\bar{g}([\mathcal{C}_n]_J) = A_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Therefore, in order to prove Theorem V it is sufficient to show the following lemma:

Let J be a σ-ideal of C_σ, let B be a σ-field of subsets of a set $\mathcal{X}$, and let $X_n \in B$ be a sequence of sets such that

$$\text{(ii)} \qquad \textit{if} \quad \prod_{n=1}^{\infty} [\mathcal{C}_n]_J^{a_n} = 0, \quad \textit{then} \quad \prod_{n=1}^{\infty} X_n^{a_n} = 0.$$

Then there exists a σ-homomorphism h of C_σ/J in B such that $h([\mathcal{C}_n]_J) = X_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Let $\varkappa$ be the characteristic function[17]) of the sequence $\{X_n\}$.

If $(c) \in J$ where $c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, then

---

[20]) An analogous problem for σ-measures is unsolved.

[21]) If K is finite, the exisrence of h follows from Theorem II.

$$\prod_{n=1}^{\infty} [\mathcal{C}_n]_J^{\alpha_n} = [\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^{\alpha_n}]_J = [(c)]_J = 0.$$

Hence, by (ii),

$$\varkappa^{-1}(c) = \prod_{n=1}^{\infty} \varkappa^{-1}(C_n^{\alpha_n}) = \prod_{n=1}^{\infty} X_n^{\alpha_n} = 0.$$

Consequently $\varkappa^{-1}(C) = 0$ for every $C \epsilon J$.

Thus the formula

$$h([C]_J) = \varkappa^{-1}(C) \quad \text{for every} \quad C \epsilon C_\sigma$$

defines a σ-homomorphism h of C_σ / J in B and

$$h([\mathcal{C}_n]_J) = \varkappa^{-1}(\mathcal{C}_n) = X_n.$$

Theorem V is proved.

The assumption that B is a σ-field of sets is essential and cannot be omitted even in the case where A is a σ-field of sets and K is a subalgebra of A.

In fact, let Z be a Borel subset of $\mathcal{C}$ which is not a G_δ[22]), and let J be the least σ-ideal of C_σ containing al closed sets $F \subset \mathcal{C}$ such that $FZ = 0$. The homomorphism g (of $ZC \subset ZC_\sigma$ in C_σ / J) defined in Lemma D) satisfies the assumption (i) since g is a σ-homomorphism. By Lemma D) g cannot be extended over $(ZC)_\sigma = ZC_\sigma$ since $\mathcal{C} - Z \epsilon C_\sigma - J$ and $Z(\mathcal{C} - Z) = 0$.

6. Extending of σ-homomorphisms defined on a subalgebra.

It is known that[23])

(*) *Every σ-measure defined on a subalgebra A_0 of A can be extended to a σ-measure on $A_{0\sigma}$.*

Theorem V implies directly the following analogous theorem on homomorphisms:

Theorem VI. Every σ-homomorphism of a subalgebra A_0 of A in a σ-field of sets B can be extended to a σ-homomorphism of *$A_{0\sigma}$ in B.*

The assumption that B is a σ-field of sets is essential (see the remark at the end of § 5).

---

[22]) A set is said to be a G_δ provided it is the product of an enumerable sequence of open sets. A set is an F_σ if it complement is a G_δ.

[23]) See Kolmogoroff [1], p 15, and Nikodym [1].

The simplest case is where A_0 is enumerable. Then $A_{0\sigma}$ is isomorphic[24]) to C_σ/J where J is a suitable σ-ideal of C_σ, and A_0 is isomorphic to $[C]_J$. The following theorem explains, under what conditions every σ-homomorphism of A_0 in any σ-complete Boolean algebra B can be extended to a σ-homomorphism of $A_{0\sigma}$ *in* B.

Theorem VI'. Let J be a σ-ideal of C_σ. In order that every σ-homomorphism of $[C]_J$ in any σ-complete Boolean algebra B can be extended to a σ-homomorphism of $([C]_J)_\sigma = C_\sigma/J$ in B, *it is necessary and sufficient that the ideal J posses the following property:*

(i) *every set $C \in J$ is contained in a set F_σ*[22]) *which belongs to J.*

N e c e s s i t y. Let $J_1 = J$ and let J_2 be the σ-ideal of all Borel sets which are contained in a set F_σ belonging to J. If the σ-homomorphism g defined in Lemma C) can be extended over C_σ/J, then $J \subset J_2$. Thus J possesses the property (i).

S u f f i c i e n c y. Let f be a σ-homomorphism of $[C]_J$ in a σ-complete Boolean algebra B. By Lemma B) there exists a σ-homomorphism g of C_σ in B such that

$$g(\mathcal{C}_n) = f([\mathcal{C}_n]_J) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Consequently:

(ii) $$g(C) = f([C]_J) \quad \text{for every } C \in C.$$

For every closed set $F \subset \mathcal{C}$ there exists a sequence $C_n \in C$ such that $F = \prod_{n=1}^{\infty} C_n$. If $F \in J$, then $\prod_{n=1}^{\infty} [C_n]_J = 0$ and

(iii) $$g(F) = \prod_{n=1}^{\infty} g(C_n) = \prod_{n=1}^{\infty} f([C_n]_J) = 0$$

since f is a σ-homomorphism.

If J possesses the property (i), the equality (iii) implies

$$g(C) = 0 \quad \text{for every } C \in J.$$

---

[24]) The definition of this isomorphism is analogous to the definition given in the first part of the proof of Theorem V. It is sufficient to pose $K = A_0 = (A_1, A_2, \ldots)$.

Therefore the formula

$$h([C]_J) = g(C) \quad \text{for} \quad C \epsilon \boldsymbol{C}_\sigma$$

defines a σ-homomorphism h of $\boldsymbol{C}_\sigma/\boldsymbol{J}$ in $\boldsymbol{B}$. By (ii), h is an extension of f.

Corollary. Every σ-homomorphism of an enumerable[24a]) *Boolean algebra A_0 in a σ-complete Boolean algebra $\boldsymbol{B}$ can be extended over the minimal extension*[25]) *A of A_0.*

In fact, A_0 is isomorphic to the field[26]) ZC where Z is a closed subset of $\mathcal{C}$. Let $\boldsymbol{I}$ be the σ-ideal of all Borel sets $C \subset Z$ of first category in the space Z. Then ZC is isomorphic to $[ZC]_I \subset ZC_\sigma/I$.

Therefore we may suppose $A_0 = [ZC]_I$. The minimal extension of A_0 is the Boolean algebra[27]) $A = ZC_\sigma/I$.

Let $\boldsymbol{J}$ be the σ-ideal of all sets $C \epsilon \boldsymbol{C}_\sigma$ which can be represented in the form $C = C' + C''$ where $C' \epsilon \boldsymbol{I}$ and $C'' \epsilon \boldsymbol{C}_\sigma$, $ZC'' = 0$. The formula

$$g([C]_J) = [CZ]_I \quad \text{for} \quad C \epsilon C_\sigma$$

defines an isomorphism g of $\boldsymbol{C}_\sigma/\boldsymbol{J}$ on $ZC_\sigma/\boldsymbol{I}$ and

$$g([C]_J) = A_0.$$

Since the ideal $\boldsymbol{J}$ possesses the property (i), the σ-homomorphism fg of $[C]_J$ in $\boldsymbol{B}$ can be extended to a σ-homomorphism h of $\boldsymbol{C}_\sigma/\boldsymbol{J}$ in $\boldsymbol{B}$ by Theorem VI'. The σ-homomorphism hg^{-1} is an extension of f over $A = ZC_\sigma/I$, q.e.d.

7. ***Collections of σ-independent subalgebras.*** A collection $\{A_\tau\}_{\tau \epsilon T}$ of σ-subalgebras of A is called a *collection of σ-independent σ-subalgebras* if $\prod_n A_n \neq 0$ for every finite or enumerable sequence $0 \neq A_n \epsilon A_{\tau_n}$, $\tau_i \neq \tau_j$ for $i \neq j$.

Banach has proved[28])

(*) *Let $\{A_\tau\}_{\tau \epsilon T}$ be a collection of σ-independent σ-sub-*

[24a]) This condition is essential.

[25]) See MacNeille [1], p 437.

[26]) See Mostowski [1], p. 45.

[27]) See Sikorski [1], p. 257.

[28]) See Banach [1], p. 160; and Marczewski [2], p. 126 (Theorem II_∞).

algebras of A *and (for every* $\tau \epsilon T$*) let* μ_τ *be a* σ*-measure on* A_τ. *If* A *is a* σ*-field of sets, then there exists a* σ*-measure* μ *on the least* σ*-subalgebra* $A_0 \subset A$ *containig all subalgebras* A_τ $(\tau \epsilon T)$, *such that*

(i) μ *is a common extension of all measures* μ_τ;

(ii) $\mu\,(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = \mu(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu\,(A_n)$ *for every sequence* $A_i \epsilon A_{\tau_i}$, $\tau_i \neq \tau_j$ *for* $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots. n$.

The analogous theorem for σ-homomorphisms can be expressed in the stronger form[29]):

Theorem VII. Let $\{A_\sigma\}_{\tau \varepsilon T}$ *be a collection of* σ*-subalgebras of* A, *and (for every* $\tau \epsilon T$*) let* h_τ *be a* σ*-homomorphism of* A_τ *in a* σ*-field of sets* B. *In order that there exist a* σ*-homomorphism* h *which is a common extension of all* h_τ *over the least* σ*-subalgebra* A_0 *contanining all algebras* A_τ, *it is necessary and sufficient that*

(iii) $$\prod_n A_n = 0 \quad \textit{imply} \quad \prod_n h_{\tau_n}(A_n) = 0$$

for any finite or enumerable sequence $A_n \epsilon A_{\tau_n}$ $(\tau_i \neq \tau_j$ *for* $i \neq j)$.

In particular if $\{A_\tau\}_{\tau \varepsilon T}$ *is a collection of* σ*-independent* σ*-subalgebras of* A, *the common extension* h *exists always for arbitrary homomorphisms* h_τ.

The necessity is obvious. The sufficiency of (iii) follows immediately from Theorem V (see the proof of Theorem III).

The assumption that B is a σ-field of sets is essential and cannot be omitted even in the case where $\overline{\overline{T}} = 2$ and $\{A_\tau\}$ are σ-independent σ-fields of sets.

In fact, it is known that[30]) $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \times \mathcal{C}''$ where $\mathcal{C}'$ and $\mathcal{C}''$ are two sets homeomorphic to $\mathcal{C}$. C'_σ and C''_σ will denote the σ-field of Borel subsets of $\mathcal{C}'$ and $\mathcal{C}''$ respectively.

---

[29]) Analogously to Theorem III. The condition

$$h\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} h\,(A_i)$$

analogous to (ii), is always satisfied; therefore it is omitted in Theorem VII.

[30]) $X \times Y$ denotes here the cartesian product of the sets X and Y.

Let Z' be an analytic subset of C' which is not a Borel set. Z' is the projection (on the $\mathcal{C}'$ -axis) of a set $C_0 \subset \mathcal{C}$, which is a G_δ.

Let $Z = (\mathcal{C}' - Z') \times \mathcal{C}''$ and let J be the σ-ideal of all Borel subsets of all sets $C' \times \mathcal{C}''$ where $C' \in C'_\sigma$ and $C' \subset Z'$. Obviously

(iv) C_0 non $\in J$ and $ZC_0 = 0$.

Let $A = ZC_\sigma$, A' = the σ-field of all sets $Z(C' \times \mathcal{C}'')$ where $C' \in C'_\sigma$, A'' = the σ-field of all sets $Z\,(C' \times C'')$ where $C'' \in C''_\sigma$. Obviously A' and A'' are σ-independent σ-subalgebras of A.

The formulas

(v) $h'(Z(C' \times \mathcal{C}'')) = [C' \times \mathcal{C}'']_J$ for $C' \in C'_\sigma$

(vi) $h''(Z(\mathcal{C}' \times C'')) = [\mathcal{C}' \times C'']_J$ for $C'' \in C''_\sigma$

define two σ-homomorphisms h' and h'' of A' in C_σ/J and of A'' in C_σ/J respectively[31]).

Suppose there exists a σ-homomorphism h of $A_0 = (A' + A'')_\sigma = ZC_\sigma = A$ in C_σ/J which is a common extension of h' and h''. Then

$$h(ZC) = [C]_J \quad \text{for every } C \in C_\sigma.$$

Let g denote the σ-homomorphism h restricted to ZC. We have

$$g(ZC) = [C]_J \quad \text{for } C \in C.$$

h is an extension of g over $(ZC)_\sigma = ZC_\sigma = A$, which is impossible on account of (iv) and Lemma D).

Thus we infer that h' and h'' possess no common extension.

*8. **Classes of σ-independent elements.*** A class $K \subset A$ is called a *class of σ-independent elements* of A if $\prod_n A_n^{\alpha_n} \neq 0$ for every finite or enumerable sequence $A_n \in K$ ($A_i \neq A_j$ for $i \neq j$) and for every sequence $\alpha_n = 0$ or 1.

It follows from theorem (*) of § 7 that[32])

---

[31]) This is obvious for h''. The analogous remark for h' follows from the fact that (for $C'_1, C'_2 \in C'_\sigma$)

$$Z(C'_1 \times \mathcal{C}'') = Z(C'_2 \times \mathcal{C}'') \text{ implies } [C'_1 \times \mathcal{C}'']_J = [C' \times \mathcal{C}'']_J.$$

[32]) See Marczewski [2], p. 125, and Marczewski [3], p. 25.

(*) *Every non-negative function $\nu(A) \leqslant 1$ defined on a class* $\boldsymbol{K}$ *of σ-independent sets can be extended to a σ-measure on* $\boldsymbol{K}_\sigma$.

The analogous theorem on σ-homomorphisms is

Theorem VIII. Every mapping f of a class $\boldsymbol{K}$ *of σ-independent elements of* $\boldsymbol{A}$ *in a σ-complete Boolean algebra* $\boldsymbol{B}$ *can be extended to a σ-homomorphism h of* $\boldsymbol{K}_\sigma$ *in* $\boldsymbol{B}$.

In contrast to theorems V—VII, $\boldsymbol{B}$ may be here an arbitrary σ-complete Boolean algebra.

By Lemma A) it is sufficient to prove Theorem VIII in the case where $\boldsymbol{K} = (A_1, A_2, \ldots)$ is an enumerable set[33]) ($A_i \neq A_j$ for $i \neq j$).

By Lemma B) there exists a σ-homomorphism g of $\boldsymbol{C}_\sigma$ in $\boldsymbol{A}$ such that $g(\mathcal{C}_n) = A_n$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

Let $c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ be any element of $\mathcal{C}$. Then $(c) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^{a_n}$ and

$$g((c)) = \prod_{n=1}^{\infty} g(\mathcal{C}_n)^{a_n} = \prod_{n=1}^{\infty} A_n^{a_n} \neq 0.$$

Thus g is an isomorphism of $\boldsymbol{C}_\sigma$ on $\boldsymbol{K}_\sigma$.

By Lemma B) there exists a σ-homomorphism $\bar{h}$ of $\boldsymbol{C}_\sigma$ in $\boldsymbol{B}$ such that $\bar{h}(\mathcal{C}_n) = f(A_n)$. Consequently $h = \bar{h} g^{-1}$ is a σ-homomorphism of $\boldsymbol{K}_\sigma$ in $\boldsymbol{B}$ which is an extension of f.

9. An existence theorem. The σ-field of all subsets of a set $\mathcal{Y}$ will be denoted by $S(\mathcal{Y})$.

Consider the following question:

(*) When does there exist a σ-measure defined on $S(\mathcal{Y})$ and vanishing for every one-point set?

Ulam has proved[34]) that such a measure does not exist if the cardinal $\mathcal{Y}$ is less than the first[35]) aleph inaccessible[36])

---

[33]) If $\boldsymbol{K}$ is finite, Theorem VIII follows directly from Theorem IV.

[34]) See Ulam [1], p. 146 and 150.

[35]) Greater than $\aleph_0$.

[36]) The definition of inaccessible alephs is given in paper Tarski [1], p. 69 and 72.

in the large sense; if $\overline{\overline{\mathcal{Y}}}$ is less than the first[35]) aleph inaccessible in the strict sense, there exists no two-valued σ-measure on $S(\mathcal{Y})$ vanishing for every one-point set.

The analogous problem for σ-homomorpisms is:

When does there exist a σ-homomorphism h of $S(\mathcal{Y})$ in a σ-field of sets X, vanishing for every one-point set (i. e. $h((y))=0$ for any $y \in \mathcal{Y}$)?

This question is equivalent to the question (*) formulated for two-valued σ-measures. More generally:

Theorem IX.[37]) *Let* $\boldsymbol{Y}$ *be a* σ-*field* (*of subsets of a set* $\mathcal{Y} \neq 0$) *containing all one-point sets* $(y) \subset \mathcal{Y}$. *The two following conditions are equivalent:*

(i) *there exists a two-valued* σ-*measure* μ *on* $\boldsymbol{Y}$ *vanishing for every one-point set* $(y) \subset \mathcal{Y}$;

(ii) *there exists a* σ-*homomorphism* h *of* $\boldsymbol{Y}$ *in a* (or: *every*) σ-*field* $\boldsymbol{X}$ (*of subsets of a set* $\mathcal{X} \neq 0$) *vanishing for every one-point set* $(y) \subset \mathcal{Y}$.

In fact, if a two-valued σ-measure μ on $\boldsymbol{Y}$ vanishes for every one-point set, then the formulas

$$h(Y)=0 \quad \text{if} \quad \mu(Y)=0$$
$$h(Y)=\mathcal{X} \quad \text{if} \quad \mu(Y)=1$$

define a σ-homomorphism h of $\boldsymbol{Y}$ in $\boldsymbol{X}$ vanishing for every one-point set.

On the other hand, if there exists no two-valued σ-measure on $\boldsymbol{Y}$ vanishing for every one-point set, then for any σ-homomorphism h of $\boldsymbol{Y}$ in $\boldsymbol{X}$ there exists a mapping φ of $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ such that[38])

$$h(Y)=\varphi^{-1}(Y) \quad \text{for every} \quad Y \in \boldsymbol{Y}.$$

Since $\mathcal{X} \neq 0$, there exists a point $y_0 \in \varphi(\mathcal{X})$. Obviously

$$h(y_0)=\varphi^{-1}(y_0) \neq 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

---

[37]) An analogous theorem holds for finitely additive measures and homomorphisms.

[38]) See Sikorski [3], p. 12.

REFERENCES.

Banach S. [1] *Measures in indeoendent fields of sets* (edited by S. Hartman). Studia Mathematica 10 (194?), pp. 159—177.

Fichtenholz G. et Kantorovitch L. [1] *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.* Studia Math. 5 (1934), pp. 69—98.

Horn A. and Tarski A. [1] *Measures in Boolean algebras.* Trans. Am. Math. Soc. 64 (1948), pp. 467—497.

Kolmogoroff A. [1] *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin 1933.

Kuratowski C. et Posament T. [1] *Sur l'isomorphie algebroogique et les ensembles relativement boréliens.* Fund. Math. 22· (1934), pp. 281—286.

Loomis L. H. [1] *On the representation of σ-complete Boolean algebras.* Bull. Am. Math. Soc. 53 (1947), pp. 757—760.

Łoś J. and Marczewski E. [1] *Extensions of measure.* Fund. Math. 36 (1949), pp. 267—276.

MacNeille H. [1] *Partially ordered sets.* Trans. Am. Math· Soc. 42 (1937), pp. 416—460.

Marczewski (Szpilrajn) E. [1] *The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications* Fund. Math. 31 (1938), pp. 207—223.

— [2] *Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures.* Colloquium Math. 1 (1948), pp. 122—132.

— [3] *Ensembles indépendants et leurs applications à la théorie de la mesure.* Fund. Math. 35 (1948), pp. 13—28.

Mostowski A. [1]. *Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemaine Metamathematik.* Fund. Math. 29 (1937), pp. 34—53.

Nikodym O. [1] *Sur la mesure vectorielle partaitement a ditive dans un corps abstrait de Boole.* Mém. Acad. R. de Belgique 17 (1938), n⁰ 7

Sikorski R. [1] *On the representation of Boolean algebras as fields of sets.* Fund. Math. 35 (1948), pp. 247—258.

— [2] *A theorem on extension of homomorphisms.* Annal. Soc. Pol. (Math. 21 (1948), pp. 332—335.

— [3] *On the inducing of homomorphisms by mappings.* Fund. Math. 36 (1949), pp. 7—22.

Tarski A. [1] *Über unerreichbare Kardinalzahlen.* Fund. Math. 30 1938), pp. 68—89.

Ulam S. [1] *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre.* Fund. Math. 16 (1930), pp. 140—150.

SUR LA RELATION ENTRE LA LARGEUR D'UN CONTOUR PLAN ET LA DEVIATION DE SES ARCS PARTIELS

Par

S. ŁOJASIEWICZ (Kraków)

Introduction

Une démonstration simple et naturelle du théorème bien connu sur l'existence d'un point singulier à l'intérieur de toute caractéristique fermée d'un système de deux équations différentielles, ordinaires, pourrait être basée sur la remarque suivante: si l'aire d'un contour plan, possédant la tangente, tend vers zéro, alors il existe sur le contour deux points dont la distance tend vers zéro et tels que les tangentes en ces points forment un angle assez grand, p. ex. supérieur à $\frac{\pi}{2}$

Partant de cette remarque M. T. Ważewski a posé le problème suivant: étant donné un contour plan dont l'aire est petite, existe-t-il sur ce contour des arcs partiels, courts avec des „virages brusques"?[1])

Or, dans la note présente, je donne une réponse affirmative à ce problème en démontrant un théorème plus général, à savoir, que les „virages brusques" existent sur les contours dont la largeur est petite. J'entends par la largeur d'un contour le diamètre du cercle, le plus grand possible, inscrit dans le contour. Je définis ensuite la notion de „virage brusque" sur un arc ne possédant pas de tangente, en introduisant la notion de déviation[2]) d'un arc. La note présente a pour l'ob-

---

[1]) „Virage brusque" veut dire que l'oscillation de la tangente le long de l'arc est grande.

[2]) Une notion analogue, sous le nom de „deflessione totale" a été introduite par M. S. Mukhopadhyaya, cf. B. Serge. Proprietà in grande delle linee piane convesse, Jornal de Matemàtica pura e aplicada. Vol. 1 — Fasc. 1 — 1936.

jet l'examen du rapport entre la largeur d'un contour plan et la déviation de ses arcs partiels

§ 1.

Dans la suite nous ne parlerons que des courbes planes.

1-ière définition de la déviation d'un arc. Considérons, un arc simple L dont l'équation soit $X = X(t)$, où $a \leqslant t \leqslant b$, et X est le point variable sur le plan. Tout vecteur $\overrightarrow{X(t_1), X(t_2)}$ où $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$, sera appelé *corde dirigée* de l'arc L. L'ensemble de toutes les cordes dirigées de l'arc L (supposées avoir le même point fixe comme origine) forme un angle que nous appelerons *angle de déviation de l'arc L.* Sa mesure sera dite *déviation de l'arc L* et nous la désignerons par *Dev L.*

2-ième définition de la déviation (contingentielle d'un arc). Nous entendrons par la *déviation contingentielle de l'arc simple L* la mesure de l'angle, le plus petit possible, contenant les contingents postérieurs (au sens de M. Bouligand) de tous les points de l'arc L à l'exception de son extrémité. Cet angle sera dit *angle de déviation (contingentielle)*[3]).

Si l'arc L possède la tangente et si sa déviation contingentielle est inférieure à 2π, alors elle est égale à l'oscillation de l'argument de la tangente le long de l'arc.

Les deux définitions sont équivalentes. Nous le démontrerons dans le § 3 sous l'hypothèse que la déviation contingentielle soit inférieure à π (cf. lemme VI). Dans la suite je vais me servir de la première définition.

Lorsque la déviation de l'arc L est inférieure à 2π, on peut considérer *la bissectrice de l'angle de déviation* définie comme l'axe divisant l'angle de déviation en deux parties égales et dirigé vers son intérieur.

Théorème I. Chaque contour rectifiable de Jordan dont la longueur est supérieure à d et dont tout arc partiel de

---

[3]) Cette définition est due à M. T. Ważewski.

[4]) Le cas $\alpha \geqslant \pi$ est banal. En effet, dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$ l'ellipse aux axes ε et d satisfait aux hypothèses du théorème I et ne contient aucun cercle de diamètre supérieur à ε.

longueur d possède la déviation ne dépassant pas α, où $0 < \alpha < \pi$[4]) contient à son intérieur un cercle ouvert de diamètre:

$$(1) \qquad \frac{d}{2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} .$$

Dans la démonstration de ce théorème nous nous appuyerons sur quelques lemmes.

Soit donné un contour de Jordan J. Désignons par

$$Int\ J \text{ et } \overline{Int}\ J$$

respectivement l'intérieur du contour J et sa fermeture. Une couple de points A et B sur le contour J le divise en deux arcs $\overset{\frown}{AB}{}^{1}$ et $\overset{\frown}{AB}{}^{2}$ dont l'un peut se réduire à un point, lorsque $A = B$. Si $C \in \overset{1}{\overset{\frown}{AB}}$ et $D \in \overset{2}{\overset{\frown}{AB}}$, alors nous dirons que la couple A, B *sépare* (au sens large) la couple C, D. Dans ce cas aussi la couple C, D sépare la couple A, B.

Un arc simple est appelé *coupure*[5]) de $Int\ J$, lorsqu'il est contenu dans $Int\ J$ à l'exception de ses extrémités qui sont situées sur J. Une coupure p divise $Int\ J$ en deux domaines disjoints G_1 et G_2 de façon que $Int\ J = G_1 + p^0 + G_2$[6]), tandis que ses extrémités divisent J en deux arcs L_1 et L_2 de façon que G_1 est l'intérieur de $L_1 + p$ et G_2 est l'intérieur de $L_2 + p$[7]). Il en résulte immédiatement que si la couple d'extrémités de la coupure p sépare celle de la coupure q, alors p et q possèdent un point commun.

Nous avons le suivant

Lemme I. Si p et q sont deux arcs simples contenus dans $Int\ J$, dont les extrémités sont situées sur J et si la couple d'extrémités de l'arc p sépare celle de l'arc q, alors p et q possèdent un point commun.

---

[5]) Carathéodory, Math. Annalen 73, 323-370.

[6]) Lorsque p est un arc, alors p^0 désigne cet arc sans extrémités.

[7]) Kerékjártó: Topologie, page 67, 1927.

Démonstration. Désignons les extrémités de l'arc p par A et B et celles de l'arc q par C et D.

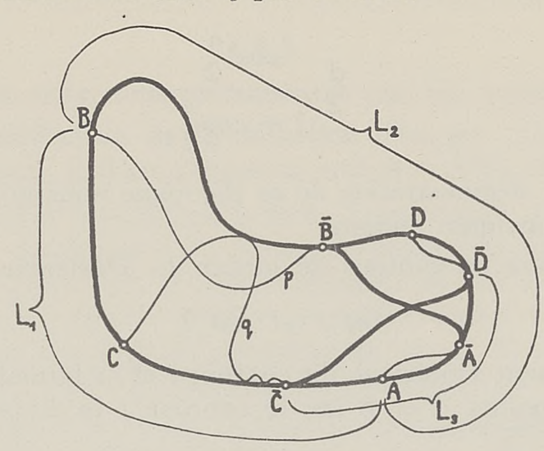


Fig. 1.

La couple A, B divise le contour J en deux arcs L_1 et L_2 de façon que $C \epsilon L_1$ et $D \epsilon L_2$. Désignons par $\bar{C}$ le dernier point sur q (si l'on parcourt l'arc q à partir de C à D) qui fait partie de l'arc L_1 (cf. fig. 1). Supposons que $\bar{C} \neq A$ et $\bar{C} \neq B$, notre lemme étant évident dans le cas contraire. Alors le point $\bar{C}$ n'appartient pas à L_2, Désignons par $\bar{D}$ le premier point sur q (si l'on parcourt q à partir de $\bar{C}$ à D) qui fait partie de L_2. On a alors $\bar{C} \neq \bar{D}$ et l'arc $\bar{q} = \widehat{\bar{C}\bar{D}}$ est une coupure de *Int* J. Les points $\bar{C}$ et $\bar{D}$ divisent J en deux arcs L_3 et L_4 de façon que $A \epsilon L_3$ et $B \epsilon L_4$ (car $\bar{C} \epsilon L_1$ et $D \epsilon L_2$). D'une façon analogue nous déterminons sur l'arc p les points $\bar{A} \epsilon L_3$ et $\bar{B} \epsilon L_4$, tels que l'arc $\bar{p} = \widehat{\bar{A}\bar{B}}$ est une coupure de *Int* J. La couple de points $\bar{C}$, $\bar{D}$ sépare celle de points $\bar{A}$, $\bar{B}$, donc $\bar{p} \cdot \bar{q} \neq 0$ et par conséquent $p \cdot q \neq 0$, ce qui termine la démonstration.

Définition de la distance géodésique et des sommets d'un contour. Si J est un contour rectifiable de Jordan, alors deux points quelconques P_1 et P_2 appartenant à $\overline{Int\ J}$ peuvent être reliés par un arc simple, rectifiable contenu

dans $\overline{Int}\ J$. La borne inférieure des longueurs de tels arcs sera dite *distance géodésique* des points P_1 et P_2. Nous la désignerons par $\varrho(P_1,P_2)$.

La distance géodésique $\varrho(P_1,P_2)$ est inférieure ou égale à la longueur de toute courbe rectifiable, contenue dans $\overline{Int}\ J$ et reliant les points P_1 et P_2. Elle remplit l'inégalité de triangle

(2) $$\varrho(P_1,P_3) \leqslant \varrho(P_1,P_2) + \varrho(P_2,P_3)$$

ainsi que la relation

(3) $$\varrho(P_1, P_2) \geqslant |P_1 - P_2|.$$

Dans cette dernière relation l'égalité ne subsiste que si le segment $\overline{P_1 P_2}$ est contenu dans $\overline{Int}\ J$. La distance géodésique $\varrho(P_1, P_2)$ est une fonction continue d'une couple de points et atteint, par conséquent, son maximum sur le contour J pour une couple de points A, B. Une telle couple de points sera dite *couple de sommets du contour* J.

Lemme II. Si A, B, C, D sont quatre points sur le contour rectifiable de Jordan J, et si la couple A, B sépare la couple C, D, alors on a l'inégalité

(4) $$\varrho(A,C) + \varrho(B,D) \leqslant \varrho(A, B) + \varrho(C,D).$$

Démonstration. Soit ε un nombre positif quelconque et relions les points A et B par un arc simple rectifiable p contenu dans $\overline{Int}\ J$ et les points C et D par un arc analogue q de façon qu'on ait les inégalités:

(5) $$|p| \leqslant \varrho(A,B) + \varepsilon \quad \text{et} \quad |q| \leqslant \varrho(C,D) + \varepsilon$$ [8].

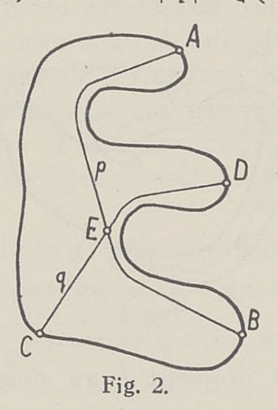


Fig. 2.

[8]) Nous désignons par $|p|$ la longueur de l'arc p.

En vertu du lemme I les arcs p et q possèdent un point commun $E \in \overline{Int}\ J$ (cf. fig. 2); le point E divise l'arc p en deux arcs $\widehat{AE}$ et $\widehat{EB}$ et l'arc q en deux arcs $\widehat{CE}$ te $\widehat{ED}$ (certains de ces arcs peuvent se réduire à un point). En considérant le courbe $\widehat{AEC} = \widehat{AE} + \widehat{EC}$ et $BED = \widehat{BE} + \widehat{ED}$ nous avons:

$$(6) \quad |p| + |q| = |\widehat{AE}| + |\widehat{EB}| + |\widehat{CE}| + |\widehat{ED}| = |\widehat{AEC}| + |\widehat{BED}|,$$

mais puisque $\varrho(A, C) \leqslant |\widehat{AEC}|$ et $\varrho(B, D) \leqslant |\widehat{BED}|$, il en résulte, d'après (5) que:

$$(7) \qquad \varrho(A,C) + \varrho(B,D) \leqslant \varrho(A,B) + \varrho(C,D) + 2\varepsilon,$$

d'où en faisant tendre ε vers zéro, nous obtenons l'inégalité (4).

Lemme III. Si M est un sommet du contour rectifiable de Jordan J et L est un arc partiel de J aux extrémités A et B, ne contenant pas le sommet M, et si le point P appartient à L, alors:

$$(8) \qquad \varrho(P,M) \geqslant \frac{1}{2} \min [\varrho(M,A), \varrho(M,B)] .$$

Démonstration. Soit N le point qui forme avec M une couple de sommets du contour J. Désignons par L_1 celui des arcs partiels du contour J aux extrémités M et N qui contient le point P.

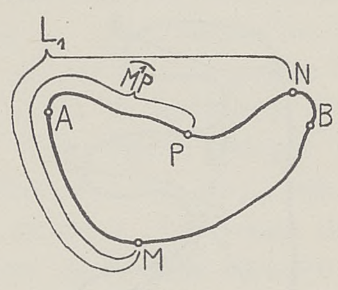


Fig. 3.

Les points M et P divisent J en deux arcs $\overset{1}{\widehat{MP}}$ et $\overset{2}{\widehat{MP}}$ dont un — $\overset{1}{\widehat{MP}}$ est une partie de l'arc L_1, tandis que

l'autre — $\overset{\frown}{\overset{2}{MP}}$ contient le point N (cf. fig 3). Puisque l'arc L contient le point P et ne contient pas le point M, une de ses extrémités, A ou bien B, fait partie de l'arc $\overset{\frown}{\overset{1}{MP}}$. Si $A \in \overset{\frown}{\overset{1}{MP}}$, alors la couple M, P divise la couple A, N, car $N \in \overset{\frown}{\overset{2}{MP}}$. Nous avons donc, d'après le lemme II, l'inégalité:

$$(9) \qquad \varrho(M,P)+\varrho(A,N) \geqslant \varrho(M,A)+\varrho(P,N),$$

d'où il résulte:

$$(10) \qquad \varrho(M,P)+\varrho(M,N) \geqslant \varrho(M,A)+\varrho(P,N)$$

puisque $\varrho(M,N) \geqslant \varrho(A,N)$. En ajoutant à l'inégalité (10) celle de triangle:

$$(11) \qquad \varrho(M,P) \geqslant \varrho(M,N)-\varrho(P,N)$$

nous obtenons $2\varrho(M,P) \geqslant \varrho(M,A)$, ou ce qui revient au même:

$$(12) \qquad \varrho(M,P) \geqslant \frac{1}{2}\varrho(M,A).$$

Dans le cas, où $B \in \overset{\frown}{\overset{1}{MP}}$, nous obtenons d'une façon analogue l'inégalité:

$$(13) \qquad \varrho(M,P) \geqslant \frac{1}{2}\varrho(M,B).$$

Nous avons donc (12) ou bien (13), d'où il résulte (8).

Lemme IV. Soit L un arc simple rectifiable de longueur d, dont la déviation α satisfait à l'inégalité $0 < \alpha < \pi$. Soient A et B les extrémités de l'arc L et désignons par M son centre[9]). Choisissons un système orthogonal des coordonnées de façon que le point M en soit l'origine et la bissectrice de l'angle de déviation de l'arc L soit l'axe x. Dans ces hypothèses:

1⁰ l'équation de l'arc L prend la forme:

$$y = f(x), \text{ où } a \leqslant x \leqslant b;$$

2⁰ $|f(x)| \leqslant |x|\, tg\frac{\alpha}{2}$, lorsque $a \leqslant x \leqslant b$;

---

[9]) Par le centre d'un arc rectifiable nous entendrons le point de cet arc qui le divise en deux arcs de la même longueur.

3^0 $|M - A| \geqslant \frac{d}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ et $|M - B| \geqslant \frac{d}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ (cf. fig. 4).

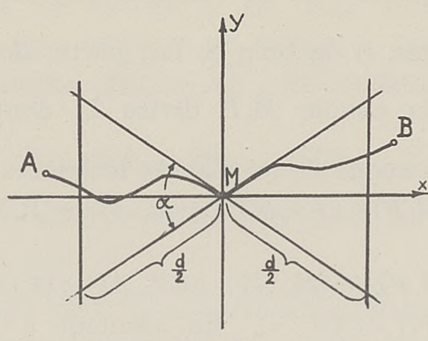


Fig. 4.

Démonstration. Comme l'axe x est la bissectrice de l'angle de déviation de l'arc L, toute corde dirigée de l'arc L forme avec l'axe x un angle δ tel que:

(14) $$|\delta| \leqslant \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Il en résulte qu'il n'existe aucune corde dirigée de l'arc L orthogonale à l'axe x, et par conséquent l'équation de l'arc L peut être mise sous la forme 1^0. Nous pouvons supposer que $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. La propriété 1^0 est donc démontrée.

Considérons maintenant le vecteur $\overrightarrow{MX}$, où $X = (x, f(x))$, $a \leqslant x \leqslant b$. D'après l'inégalité (14), nous avons:

(15) $$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|tg\,\delta\right| \leqslant \left|tg\,\frac{\alpha}{2}\right|.$$

d'où il résulte la propriété 2^0.

L'arc $\widehat{MB}$ est une partie de l'arc L, de longueur $\frac{d}{2}$. Soit ε un nombre positif quelconque. Désignons par $0 = x_0 < x_1 < \ldots . < x_n = b$ les abcisses des sommets d'une ligne polygonale inscrite dans l'arc $\widehat{MB}$, telle que la différence entre sa largeur et $\frac{d}{2}$ soit inférieure à ε. Nous avons donc:

$$(16)\qquad \frac{d}{2}-\varepsilon \leqslant \sum_{i/1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+((f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

ou ce qui revient au même:

$$(17)\qquad \frac{d}{2}-\varepsilon \leqslant \sum_{i/1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+\left[\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right]^2}.$$

En considérant les cordes dirigées $\overrightarrow{X_{i-1}X_i}$, où $X_i=(x_i, f(x_i))$, $i=1,\ldots,n$, nous avons d'après (14):

$$(18)\qquad \left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right|=\left|tg\,\delta\right|\leqslant tg\frac{\alpha}{2},$$

et par conséquent:

$$(19)\qquad \frac{d}{2}-\varepsilon \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sum_{i/1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

En faisant tendre ε vers zéro nous en obtenons, à la limite, $b\geqslant\frac{d}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, d'où il résulte la seconde inégalité 3⁰, puisque $B=(b,f(b))$ et $M=(0,0)$. On démontre d'une façon analogue la première inégalité 3⁰, ce qui termine la démonstration du lemme IV.

A présent nous allons démontrer un théorème dont le théorème I sera une conséquence immédiate.

Nous entendrons par le *secteur de rayon r, d'angle α et de sommet M* l'ensemble qui est le produit du cercle ouvert de centre M et de rayon r, et de l'angle ouvert (sans côtés) de sommet M et de mesure α.

Théorème I a. Si J est un contour rectifiable de Jordan et M est un de ses sommets, et si L est arc partiel de centre M et de longueur d dont la déviation α remplit l'inégalité $0<\alpha<\pi$, alors le contour J contient à son intérieur un secteur

de sommet M, de l'angle $\pi - \alpha$ et de rayon $\frac{d}{4}\cos\frac{\alpha}{2}$. (cf. fig. 5).

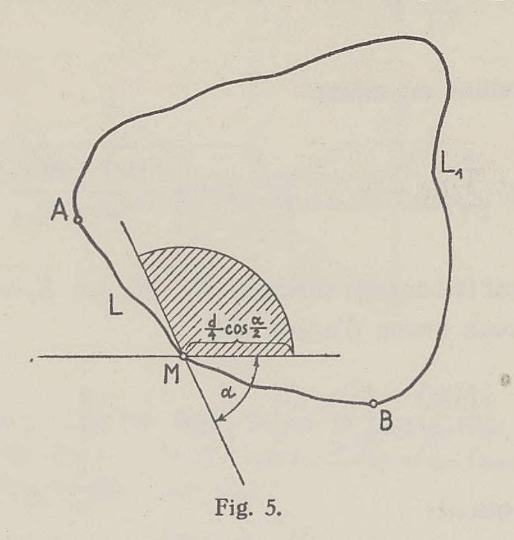


Fig. 5.

Démonstration. Choisissons un système orthogonal de coordonnées de façon que l'arc L satisfasse aux hypothèses du lemme IV. Désignons par A et B les extrémités de l'arc L. L'autre arc partiel du contour J aux extrémités A et B soit désigné par L_1. En vertu des inégalités: $\varrho(M, A) \geqslant |M - A|$ et $\varrho(M, B) \geqslant |M - B|$, et d'aprés le lemme IV, 3°, il résulte du lemme III que:

$$\varrho(P, M) \geqslant \frac{d}{4}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \text{pour tout } P \in L_1. \tag{20}$$

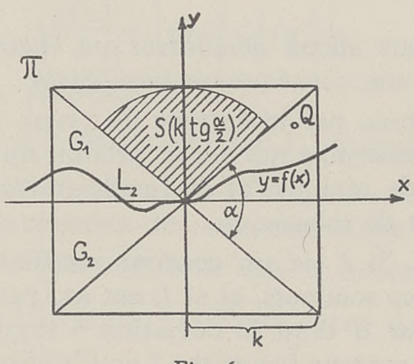


Fig. 6.

Le point M n'appartenant pas à L_1, il existe un nombre $k>0$, $k<\min(|a|,|b|)$, tel que le rectangle:

$$\Pi \begin{cases} |x|<k \\ |y|<k \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

de centre M soit disjoint avec l'arc L_1. L'arc L_2 à l'équation:

$$y=f(x), \qquad \text{où } |x|\leqslant k$$

est situé, d'aprés le lemme IV, 2^0, dans le rectangle Π à l'exception de ses extrémités et le divise en deux domaines disjoints (cf. fig. 6.):

$$G_1\begin{cases} |x|<k \\ f(x)<y<k \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad G_2\begin{cases} |x|<k \\ -k \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<y<f(x) \end{cases}$$

de façon que $\Pi=G_1+L_2^0+G_2$. Puisque le point M est un point frontière de $Int\,J$, le rectangle Π contient un point $Q\in Int\ J$. Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que Q fait partie de G_1. Le domaine G_1 étant disjoint avec le contour J, est contenu à l'intérieur ou bien à l'extérieur de J.

Mais puisque $Q\in G_1$ et $Q\in Int\ J$, on a:

(21) $$G_1 \subset Int\ J.$$

Désignons par $S(\varrho)$ l'ensemble de points (x,y) satisfaisant aux conditions:

(22) $$x^2+y^2<\varrho^2 \text{ et } y>|x| \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

C'est un secteur de rayon ϱ, d'angle $\pi-\alpha$ et de sommet M. Nous avons (cf. fig. 6):

(23) $$S(k \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})\subset G_1.$$

En effet, lorsque (x,y) satisfait aux conditions (22) avec $\varrho=k \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, alors $y<k \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, et par conséquent $|x|<k$. D'aprés le lemme IV,2^0, nous avons donc l'inégalité $f(x)\leqslant|x| \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<y$. Il s'ensuit que $(x,y)\in G_1$. Des relations (23) et (21) il ré-

sulte que $S(k\ tg\ \frac{a}{2}) \subset Int\ J$. Désignons par r la borne supérieure des nombres ϱ, tels que $S(\varrho) \subset Int\ J$. On a alors:

(24) $$S(r) \subset Int\ J$$

(comme $S(r) = \sum_{n/1}^{\infty} S\left(r - \frac{1}{n}\right)$). Puisque $S\left(r + \frac{1}{n}\right)$ n'est pas contenu dans $Int\ J$, il existe un point $P_n = (x_n, y_n)$ tel que $P_n \epsilon J$ et $P_n \epsilon S\left(r + \frac{1}{n}\right)$. En vertu de la seconde inégalité (22) et du lemme IV, 2⁰, le secteur $S\left(r + \frac{1}{n}\right)$ n'a pas de points communs avec l'arc L, donc (cf. fig. 7):

(25) $$P_n \epsilon L_1.$$

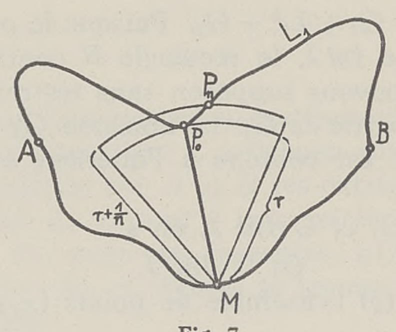


Fig. 7.

Mais puisque, d'après (24), P_n ne fait pas partie de $S(r)$, nous avons:

(26) $$r \leqslant |P_n - M| \leqslant r + \frac{1}{n}.$$

D'après (25), la suite P_n possède un point d'accumulation $P_0 = (x_0, y_0)$ appartenant à L_1. En vertu de (20) nous avon l'inégalité:

(27) $$\varrho\ (P_0, M) \geqslant \frac{d}{4} \cos \frac{a}{2}.$$

En faisant tendre n vers ∞ on obtient de l'inégalité (26), à la imite, la relation:

(28) $$|P_0 - M| = r.$$

De même puisque, d'aprés (22), $y_n > |x_n| \, tg \frac{\alpha}{2}$ on obtient à la limite, l'inégalité:

(29) $$y_0 \geqslant |x_0| \, tg \frac{\alpha}{2} .$$

Des relations (28) et (29) il résulte, d'après (22), que le point P_0 appartient à $\overline{S(r)}$ et puisque $\overline{S(r)}$ est un ensemble convexe et le point M en fait partie, le segment $\overline{P_0 M}$ est contenu dans $\overline{S(r)}$. D'après (24), $\overline{S(r)} \subset \overline{Int\, J}$, donc $\overline{P_0 M} \subset \overline{Int\, J}$ et par conséquent $\varrho(P_0, M) = |P_0 - M|$. Il s'ensuit, d'après (27) et (28), que $r \geqslant \frac{d}{4} \cos \frac{\alpha}{2}$. En vertu de (24), il en résulte que le secteur $S\left(\frac{d}{4} \cos \frac{\alpha}{2}\right)$ est contenu dans $Int\, J$, ce qui termine la démonstration.

Un secteur de l'angle $\beta < \pi$ et de rayon r contient un cercle ouvert de diamètre $2r \dfrac{\sin \frac{\beta}{2}}{1 + \sin \frac{\beta}{2}}$, donc le secteur

$S\left(\frac{d}{4} \cos \frac{\alpha}{2}\right)$ contient un cercle ouvert de diamètre $\dfrac{d}{2} \cdot \dfrac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$

La fonction $\dfrac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}$ étant décroissante, il en résulte immédiatement le théorème I.

Remarque 1. Il s'ensuit du théorème Ia que le théorème I est vrai sous l'hypothèse que la déviation de l'arc partiel de longueur d dont le centre est un des sommets du contour J ne dépasse pas α.

Définition de la largeur d'un contour de Jordan. Par la *largeur* $D(J)$ d'un contour de Jordan nous entendrons la

borne supérieure des diamètres des cercles contenus dans $\overline{Int}\ J$.

Soit J un contour rectifiable de Jordan, de largeur D

Si $0 < \alpha < \pi$ et $\frac{d}{2} \cdot \frac{cos^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + cos \frac{\alpha}{2}} > D$, alors en vertu du théorème I (par contre-position) il existe un arc partiel de J, dont la longueur ne dépasse pas d et dont la déviation est supérieure à α.

Nous avons donc, en prenant $d = \frac{4\,D}{cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, le suivant:

Théorème II. Si la largeur d'un contour rectifiable de Jordan est D, alors à tout α, tel que $0 < \alpha < \pi$, on peut faire correspondre un arc partiel du contour, dont la longueur ne dépasse pas $\frac{4D}{cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ et dont la déviation est supérieure à α.

Supposons que $D_n \to 0$ et $D_n > 0$. Il existe deux suites ε_n et α_n, telles que $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, $\frac{D_n}{\varepsilon_n} \to 0$ (*p. ex.* $\varepsilon_n = \sqrt{D_n}$), $\alpha_n \to \pi$, $\alpha_n < \pi$ et $(cos \frac{\alpha_n}{2})^2 = \varepsilon_n$. On a alors $\frac{4\,D_n}{cos^2 \frac{\alpha_n}{2}} \to 0$.

Nous avons donc le suivant:

Théorème III. Si J_n est une suite de contours rectifiables de Jordan et si $D(J_n) \to 0$, alors sur chaque contour J_n il existe un arc partiel L_n, tel que:

$$|L_n| \to 0 \quad \text{et} \quad \text{Dev } L_n \to \pi.$$

§ 2.

Dans les hypothèses du théorème I le contour J contient à son intérieur un cercle de diamètre $\frac{d}{2} \frac{cos^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + cos \frac{\alpha}{2}}$. Il nous semble, par intuition, que tout contour safisfaisant à ces hypothèses, contient à son intérieur un cercle de dia-

mètre beaucoup plus grand. Il se pose donc la question de savoir comment formuler le problème pour que la solution donne le diamètre, le plus grand possible, d'un cercle contenu à l'intérieur du contour.

Définition de la fonction $g(\alpha)$. Désignons par $R_{d,\alpha}$ la famille de tous les contours rectifiables de Jordan, satisfaisant aux hypothèses du théorème I, c. à. d. la famille de contours de longueur supérieure à d, dont chaque arc partiel de longueur d possède la déviation ne dépassant pas α. Posons:

$$f(d,\alpha) = \underset{J \in R_{d,\alpha}}{\text{borne inf}}\, D(J), \text{ pour } d>0 \text{ et } 0<\alpha<\pi.$$

En faisant subir chaque contour de la famille $R_{1,\alpha}$ la transformation par homotétie de coëfficient d, nous en obtenons la famille $R_{d,\alpha}$. Comme la largeur d'un contour soumis à cette transformation se multiplie par d, nous avons $f(d,\alpha) = d f(1,\alpha)$, En posant $f(1,\alpha) = g(\alpha)$, on peut écrire:

$$(30) \quad d g(\alpha) = \underset{J \in R_{d,\alpha}}{\text{borne inf}}\, D(J), \text{ pour } d>0 \text{ et } 0<\alpha<\pi.$$

Il en résulte le suivant:

Théorème IV. Dans les hypothèses du théorème I, $\overline{Int\ J}$ contient un cercle de diamètre $d g(\alpha)$.

Si nous connaissions la fonction $g(\alpha)$, alors le théorème IV nous donnerait le diamètre, le plus grand possible, d'un cercle contenu dans $\overline{Int\ J}$ pour tout contour J satisfaisant aux hypothèses du théorème I. Notre problème se réduit donc à celui de trouver la fonction $g(\alpha)$.

Le théorème I nous en donne une limitation d'en bas, à savoir:

$$(31) \qquad \frac{d}{2}\,\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}} \leqslant g(\alpha), \quad \text{lorsque } 0<\alpha<\pi,$$

d'où il résulte que:

$$(32) \qquad g(\alpha) > 0, \quad \text{lorsque } 0<\alpha<\pi.$$

Nous allons tâcher de limiter la fonction $g(\alpha)$ d'en haut. A cet effet il suffit de construire un contour de la famille

$R_{d,\alpha}$, faisant e. sorte que sa largeur soit la plus petite possible.

Prenons $d > 0$, $0 < \alpha < \pi$, et soit n un nombre naturel, tel que:

(33) $$(n-1)\alpha \leqslant \pi < n\alpha.$$

Si $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, alors $n \geqslant 3$. Dans ce cas désignons par P la ligne polygonale composée de $n+1$ segments dirigés de longueur d et tels que deux segments consécutifs forment l'angle α.

Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, alors $n = 2$. Dans ce cas désignons par P la ligne polygonale composée de trois segments dirigés, tels que deux segments consécutifs forment l'angle α et que celui du milieu possède la longueur d et la longueur $\overline{d}$ de deux extrêmes satisfasse à l'inégalité:

(34) $$\frac{d}{2} < \overline{d} < \frac{d}{2|\cos\alpha|}.$$

Dans tous les deux cas la ligne polygonale P n'a pas de points doubles (ce qui résulte des inégalités (33) et (34)) et elle est située toute entière d'un même côté de la droite p passant par ses extrémités (cf. fig. 8.).

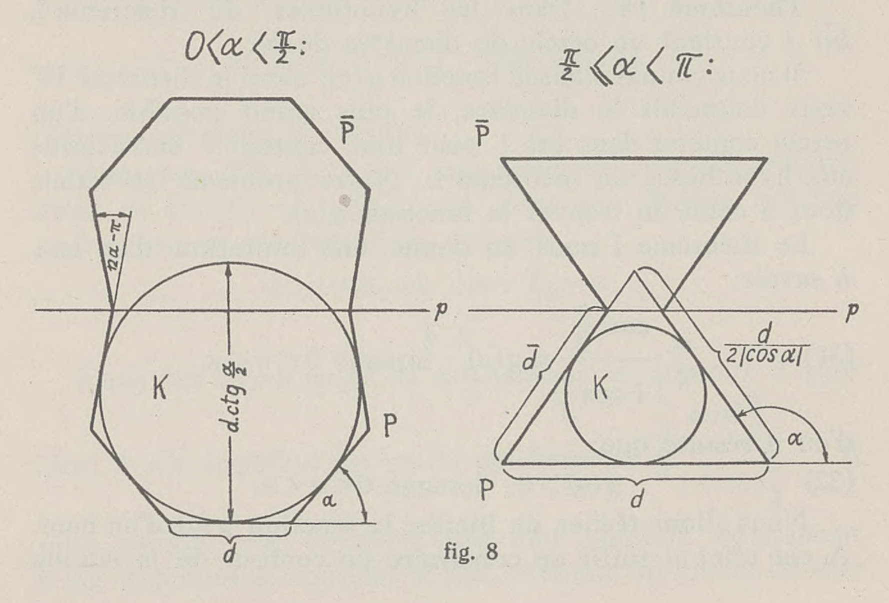


fig. 8

Désignons par K le cercle tangent à tous les côtés de la ligne P. Le diamètre de K est égal à:

(35) $$D = d\, ctg \frac{\alpha}{2}.$$

Soit $\overline{P}$ l'image symétrique de la ligne P par rapport à la droite p. Le polygone fermé $Q = P - \overline{P}$ est un contour de Jordan et toute couple de ses côtés (dirigés) consécutifs forme un angle ne dépassant pas α (ce qui résulte de l'inégalité (33)). Il s'ensuit aisément que:

(36) $$Q \in R_{d,\alpha}.$$

Le cercle K est (en vertu de (33)) le plus grand possible contenu dans $\overline{Int}\, Q$, donc d'après (35), $D(Q) = d\, ctg \frac{\alpha}{2}$. Il en résulte, en vertu de (36) et (30), l'inégalité: $d\, g(\alpha) \leqslant d\, ctg \frac{\alpha}{2}$. Nous avons donc la limitation suivante:

(37) $$g(\alpha) \leqslant ctg \frac{\alpha}{2}, \quad \text{lorsque } 0 < \alpha < \pi.$$ [10]

Il résulte du théorème IV (par contre-position) que lorsque le contour J est de largeur $D < d\, g(\alpha)$, alors J n'appartient pas à $R_{d,\alpha}$, c. à. d. il existe un arc partiel de J dont la longueur ne dépasse pas d et dont la déviation est supérieure à α. En prenant $d = \frac{D}{g(\alpha)} + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, nous en déduisons le suivant:

Théorème V. Si le contour rectifiable de Jordan J possède la largeur D, alors à tout $\alpha \in (0, \pi)$ et $\varepsilon > 0$, il correspond un

---

[10]) Il semble probable que $g(\alpha) = ctg \frac{\alpha}{2}$. Si l'on pouvait le démontrer, alors tout contour de Jordan ayant en chaque point la courbure $\leqslant 1$, et par conséquent appartenant à la famille $R_{\alpha,\alpha}$, contiendrait un cercle de diamètre $\alpha\, ctg \frac{\alpha}{2}$. Comme $\lim \alpha\, ctg \frac{\alpha}{2} = 2$, il en résulterait que tout contour de ce genre contient un cercle de diamètre 2. Ce résultat a été obtenu par une autre voie par M. F. Bäbler, Ueber geschlossene ebene Kurven von beschränkter Krümmung, Comm. Math. Helvet. 8, 5—47 (1935).

arc partiel de J dont la longueur ne dépasse pas $\frac{D}{g(\alpha)}+\varepsilon$ et dont la déviation est supérieure à α.

Nous allons démontrer maintenant que:

$$\lim_{\alpha\to 0} g(\alpha)=\infty. \tag{38}$$

A cet effet nous démontrerons l'inégalité:

$$g(\alpha)\geqslant n\, g(n\alpha), \quad \text{lorsque } 0<n\alpha<\pi, \tag{39}$$

en nous appuyant sur le lemme suivant.

Lemme V. Soit L un arc simple aux extrémités A et D. Supposons que les points C et B appartiennent à L^0 et que C soit situé entre A et B de façon que la partie commune des arcs partiels $L_1=\widehat{AB}$ et $L_2=\widehat{CD}$ forme un arc $L_3=\widehat{CB}$ ne se réduisant pas à un point $(C\neq B)$. Ceci étant supposé, lorsque $Dev\ L_1\leqslant\alpha$ et $Dev\ L_2\leqslant\beta$, où $\alpha+\beta<\pi$, alors:

$$Dev\ L\leqslant\alpha+\beta. \tag{40}$$

Démonstration. Désignons par (u,v) l'angle entre deux vecteurs (resp. entre deux axes, ou entre un vecteur et un axe) u et v. Soient l_1 et l_2 les bissectrices des angles de déviation des arcs L_1 et L_2 et soit w une corde dirigée de l'arc L_3. On a $|(w,l_1)|\leqslant\frac{\alpha}{2}$ et $|(w,l_2)|\leqslant\frac{\beta}{2}$, d'où $(l_1,l_2)|\leqslant\frac{\alpha+\beta}{2}$. Il existe donc un axe l, tel que $|(l,l_1)|\leqslant\frac{\beta}{2}$ et $|(l,l_2)|\leqslant\frac{\alpha}{2}$. Nous avons alors:

$$|(v,l)|\leqslant\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}, \tag{41}$$

lorsque v est une corde dirigée quelconque de l'arc L_1, ou bien de l'arc L_2. Choisissons l comme l'axe x d'un système orthogonal de coordonnées et soient $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, où $t_A\leqslant t\leqslant t_B$, les équations paramétriques de l'arc L. Supposons que les points A, C, B, D correspondent aux paramètres $t_A<t_C<t_B<t_D$. Si $u=(\varphi(\bar{t})-\varphi(t), \psi(\bar{t})-\psi(t))$

est une corde dirigée de l'arc L_1, ou bien de l'arc L_2 (c. à. d. $t_A < t < \bar{t} < t_B$, ou bien $t_C < t < \bar{t} < t_D$), alors d'après (41), on a:

(42) $$\varphi(\bar{t}) - \varphi(t) = |u| \cos(u, l) > 0$$

et

(43) $$\left|\frac{\psi(\bar{t}) - \psi(t)}{\varphi(\bar{t}) - \varphi(t)}\right| = |tg(u, l)| \leqslant tg \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Nous prouverons que l'inégalité (41) subsiste pour toute corde dirigée de l'arc L. Il suffit de le démontrer dans le cas, où $v = (\varphi(t_2) - \varphi(t_1), \psi(t_2) - \psi(t_1))$, n'est pas une corde dirigée de l'arc L_1, ni de l'arc L_2, c. à. d. lorsque $t_A \leqslant t_1 < t_C < t_B < t_2 \leqslant t_D$. Choisissons t_3 de façon que $t_C < t_3 < t_B$. Alors $u_1 = (\varphi(t_3) - \varphi(t_1), \psi(t_3) - \psi(t_1))$ sera une corde dirigée de l'arc L_1 et $u_2 = (\varphi(t_2) - \varphi(t_3), \psi(t_2) - \psi(t_3))$ en sera une de l'arc L_2. Nous aurons donc, d'après (42):

(44) $$\cos(v, l) = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{|v|} =$$

$$= \frac{[\varphi(t_2) - \varphi(t_3)] + [\varphi(t_3) - \varphi(t_1)]}{|v|} > 0$$

et d'après (43):

(45) $$|tg(v, l)| = \left|\frac{\psi(t_2) - \psi(t_1)}{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[\varphi(t_2) - \varphi(t_3)] \cdot \left|\frac{\psi(t_2) - \psi(t_3)}{\varphi(t_2) - \varphi(t_3)}\right| + [\varphi(t_3) - \varphi(t_1)] \cdot \left|\frac{\psi(t_3) - \psi(t_1)}{\varphi(t_3) - \varphi(t_1)}\right|}{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)} \leqslant tg \frac{\alpha+\beta}{2}$$

d'où il résulte que $|(v, l)| \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}$. L'inégalité (41) subsiste donc pour toute corde dirigée de l'arc L, d'où on déduit immédiatement (40).

Nous démontrerons à présent que:

(46) $R_{d,\alpha} \subset R_{nd-\varepsilon, n\alpha}$, lorsque $0 < n\alpha < \pi$ et $\varepsilon > 0$.

Soit J un contour appartenant à $R_{d,\alpha}$. Nous prouverons d'abord que la longueur de J est supérieure à $nd - \varepsilon$. En

effet supposons, par impossible, que la longueur de J ne surpasse pas $nd-\varepsilon$ $n\alpha$ étant inférieure à π, il existe un arc partiel $L=\widehat{AB}$, tel que:

(47) $$d<|L|\leqslant nd-\varepsilon$$

et

(48) $$Dev\, L>n\alpha.$$

En vertu de l'inégalité (47), on voit aisément que l'arc L peut être représenté comme une somme de n arcs partiels $\widehat{AB_1}$, $\widehat{A_2B_2}, \ldots, \widehat{A_nB}$ de longueur d et tels que la partie commune de deux arcs consécutifs forme un arc ne se réduisant pas à un point. Comme $J\in R_{d,\alpha}$, la déviation de chacun de ces arcs partiels ne dépasse pas α. D'après le lemme V appliqué $n-1$ fois, il en résulte que $Dev\, L\leqslant n\alpha$, ce qui contredit à (48). Nous venons de démontrer en même temps que la déviation de tout arc partiel de J, dont la longueur satisfait à l'inégalité (47), ne dépasse pas $n\alpha$. Il s'ensuit que $J\in R_{nd-\varepsilon,\, n\alpha}$, on a donc $R_{d,\alpha}\subset R_{nd-\varepsilon,\, n\alpha}$.

De la relation (46) il résulte, en vertu de (30), que $d\, g(\alpha)\geqslant(nd-\varepsilon)\, g(n\alpha)$, d'où en faisant tendre ε vers zéro, on obtient, à la limite, l'inégalité (39).

Remarquons maintenant que la fonction $g(\alpha)$ est non-croissante. En effet pour $\alpha_1<\alpha_2$, on a $R_{d,\alpha_1}\subset R_{d,\alpha_2}$, d'où d'après (30), il résulte que $g(\alpha_1)\geqslant g(\alpha_2)$.

Faisons correspondre à tout $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ un k_α naturel, tel que $\frac{\pi}{4}\leqslant k_\alpha\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. On a alors $k_\alpha\to\infty$, lorsque $\alpha\to 0$. Il s'ensuit, d'après (32), que $k_\alpha g\left(\frac{\pi}{2}\right)\to\infty$. Mais la fonction $g(\alpha)$ étant non-croissante, nous avons en vertu de l'inégalité (39):

$$k_\alpha g\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqslant k_\alpha g(k_\alpha\alpha)\leqslant g(\alpha)$$

et par conséquent $\lim\limits_{\alpha\to 0} g(\alpha)=\infty$.

De la relation (38) on déduit le suivant:

Théorème VI. Soit J_n une suite de contours rectifiables de Jordan. Si la déviation de chaque arc partiel de J_n, ayant la longueur d, ne dépasse pas α_n et si $\alpha_n \to 0$, alors $D(J_n) \to \infty$.

§ 3.

Lemme VI. Si la déviation contingentielle de l'arc simple L est inférieure à π, alors elle est égale à $DevL$.

Nous nous appuyerons sur le lemme suivant, dont nous nous dispensons de la démonstration,

Lemme VII. Si chacun des vecteurs $w_1, \ldots, w_n$ forme avec l'axe l un angle ne dépassant pas α, où $\alpha < \frac{\pi}{2}$, alors il en est de même de l'angle entre le vecteur $w = w_1 + .. + w_n$ et l'axe l.

Nous passons maintenant à la *démonstration du lemme VI.*

Désignons par α la déviation contingentielle de l'arc L. Comme l'inégalité $\alpha \leqslant Dev\ L$ est évidente il suffit de démontrer que $DevL \leqslant \alpha$. Soit:

$$X = X(t), \quad \text{où} \quad a \leqslant t \leqslant b$$

l'équation de l'arc L. Désignons par l la bissectrice de l'angle de déviation contingentielle et soit:

$$a \leqslant t_1 < t_2 < b. \tag{49}$$

ε étant un nombre positif quelconque, on peut faire correspondre à tout $t \in [t_1, t_2]$ un $\delta_t > 0$, tel que

$$|(\overrightarrow{X(t), X(t')}\ ,\ l)| \leqslant \frac{\alpha}{2} + \varepsilon,$$

lorsque $t < t' < t + \delta_t$. Il en résulte, en vertu du théorème de Borel – Lebesgue sur le recouvrement, qu'il existe une suite de points $t_1 = \tau_0 < \ldots < \tau_n = t_2$, telle que

$$|(\overrightarrow{X(\tau_{i+1}). X(\tau_i)}\ ,\ l)| \leqslant \frac{\alpha}{2} + \varepsilon. \tag{50}$$

Il s'ensuit, d'après le lemme VII, que:

$$|(\overrightarrow{X(t_1), X(t_2)}\ ,\ l)| \leqslant \frac{\alpha}{2} + \varepsilon,$$

d'où en faisant tendre ε vers zéro, nous obtenons:

$$(51) \qquad |(\overrightarrow{X(t_1), X(t_2)}\ ,\ l)| \leqslant \frac{\alpha}{2},$$

pour toute couple t_1 et t_2 satisfaisant à l'inégalité (49). En faisant tendre t_2 vers b, on voit que l'inégalité (51) a lieu aussi lorsque $t_2 = b$. Nous venons de démontrer que toute corde dirigée de l'arc L forme avec l'axe l un angle ne dépassant pas $\frac{\alpha}{2}$, d'où il résulte que $Dev L \leqslant \alpha$.

Comme il est, en général, plus facile de déterminer la déviation contingentielle, le lemme VI rend les théorèmes des paragraphes précédents plus maniables dans les appli cations.

Remarque 2. La notion de déviation peut être précisée de la façon suivante.

Soit donné un arc simple L et écrivons son équation sous la forme:

$$z = z(t), \quad \text{où} \quad a \leqslant t \leqslant b$$

et z désigne la variable complexe. On peut démontrer le théorème suivant:

Il existe une fonction $F(t,u)$ définie et continue pour $a \leqslant t < u \leqslant b$ et telle que

$$F(t,u) = arg\,[z(u) - z(t)].$$

La différence entre deux fonctions satisfaisant à ces conditions est toujours constante.

En vertu de ce théorème, nous définissons:

$$Dev^*\ L \overset{df}{=} \underset{a \leqslant t < u \leqslant b}{osc} F(t,u).$$

SUR LES INTÉGRALES OSCILLANTES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

par

ZYGMUNT BUTLEWSKI (Poznań)

Introduction. Dans cet article nous étudions une *solution particulière* de l'équation différentielle aux dérivées partielles du second ordre:

$$\text{(I)}\ A(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B(x)\frac{\partial z}{\partial x}+C(x)z=A_1(y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+B_1(y)\frac{\partial z}{\partial y}+C_1(y)z,$$

où *les coefficients* $A(x), B(x), C(x)$ *sont des fonctions continues et dérivables de la variable réelle* x *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$; *les coefficients* $A_1(y), B_1(y), C_1(y)$ *sont des fonctions continues et dérivables de la variable réelle* y *pour* $0<y_0\leqslant y<+\infty$.

Nous appelons la solution réelle $z=z(x,y)$ de l'équation (I) *solution oscillante*, si l'on a:

$$z(x_i, y)\equiv 0, \qquad z(x, y_i)\equiv 0, \qquad (i=1,2,3,\ldots),$$

où

$$x_0<x_1<x_2<\ldots,\ y_0<y_1<y_2<\ldots.$$

En appliquant à l'équation (I) *la méthode des solutions partielles* de Bernoulli[1]) nous ramenons la considération des solutions de l'équation (I) à la considération des solutions des deux équations différentielles linéaires du second ordre:

$$\text{(II)}\quad \begin{array}{ll} \alpha) & A(x)\dfrac{d^2 u}{dx^2}+B(x)\dfrac{du}{dx}+[C(x)+\lambda]u=0 \\ \beta) & A_1(y)\dfrac{d^2 v}{dy^2}+B_1(y)\dfrac{dv}{dy}+[C_1(y)+\lambda]v=0, \end{array}$$

où λ est un paramètre $(-\infty<\lambda<+\infty)$.

---

[1]) Cf. p. ex. *E. Goursat*. Cours d'Analyse Mathématique. T. 3 (1915) pp. 131—132, 2-ème édition, Paris.

Dans la suite nous réduisons les équations (II) au type de l'équation de Sturm-Liouville[2]):

$$\text{(III)} \qquad \frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dw}{dt}\right]+[q(t)+\lambda r(t)]w=0.$$

Nous dirons qu'une intégrale $w(t,\lambda)$ de l'équation (III) est *oscillante*, si elle possède une infinité de zéros pour $0<t_0\leqslant t<+\infty$ et $\lambda=\text{Const.}$

D'après *le théorème de comparaison* de Sturm[3]) toute solution $w(t,\lambda)$ non identiquement nulle de l'équation (III) a au moins k zéros dans l'intervalle fini $\langle t_0, T\rangle$, si:

$$p(t)>0, \quad q(t)+\lambda r(t)>0 \quad \text{pour } t_0\leqslant t\leqslant T$$

et

$$\frac{\min\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}[q(t)+\lambda r(t)]}{\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}[p(t)]}\geqslant\frac{k^2\pi^2}{(T-t_0)^2}.$$

Selon Kneser[4]) si dans l'équation (III) les coefficients $p(t)$ et $q(t)+\lambda r(t)$ sont finis, continus et positifs pour les grandes valeurs t et si les inégalités: $0\leqslant\alpha<1$, $0\leqslant\beta<1$,

$$\lim_{t\to+\infty}\{t^\alpha[q(t)+\lambda r(t)]\}>0, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{t^\beta}{p(t)}>0$$

sont satisfaites, toute intégrale ainsi que ses deux premières dérivées sont finies, continues et oscillantes pour les grandes valeurs de t.

---

[2]) *M. Bôcher*. Leçons sur les méthodes de Sturm, p. 57; aussi: *R. Courant* u. *D. Hilbert*. Methoden der Mathematischen Physik, I (1931), pp. 250—251, 2-te Auflage.

[3]) *M. Bôcher*, cité sous 2) p. 57, aussi p. ex. *M. Petrovitch*, Intégration qualitative des équations différentielles, *Memorial des sci. math.* fasc. 48 (1931), p. 31.

[4]) *A. Kneser*. Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen, *Mathematische Annalen*, t. 42 (1893).

M. Biernacki a démontré[5]) que si $p(t) > 0$, $q'(t) + \lambda r'(t) > 0$ pour $t > t_0$, $\lim_{t \to +\infty} [q(t) + \lambda r(t)] = +\infty$ et la quantité

$$p(t). \frac{\{\log [q(t) + \lambda r(t)]\}^p}{q(t) + \lambda r(t)}, \quad (p > 2)$$

est bornée lorsque $t \to +\infty$, toute intégrale de l'équation (III) est oscillante et la distance des zéros successifs d'une intégrale tend vers zéro lorsque $t \to +\infty$.

M. Biernacki a donné aussi *la condition suffissante*:

$$\lim_{t \to +\infty} [t^2 (b^2 - 2b + 4a)] > 1$$

(en général plus commode que les précédentes) pour que toute intégrale $x(t)$ de l'equation différentielle

$$x''(t) + b(t)\, x'(t) + a(t)\, x(t) = 0$$

soit *oscillante* pour les grandes valeurs de la variable t.

En appliquant cette condition aux équations II, α) et II, β), on obient des conditions suffissantes pour que les intégrales $u(x, \lambda)$ et $v(y, \lambda)$ des équations II, α) et II, β) soient oscillantes pour les grandes valeurs respectivement x et y. Ces conditons sont respectivement pour les équations II, α) et II, β) les suivantes:

$$\lim_{x \to +\infty} \left\{ x^2 \left[\left(\frac{B}{A}\right)^2 - 2\left(\frac{B}{A}\right)' + 4\frac{C + \lambda}{A} \right] \right\} > 1$$

et

$$\lim_{y \to +\infty} \left\{ y^2 \left[\left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2 - 2\left(\frac{B_1}{A_1}\right)' + 4\frac{C_1 + \lambda}{A_1} \right] \right\} > 1$$

Si donc ces deux conditions sont simultanément remplies, l'intégrale $z(x, y, \lambda) \equiv u(x, \lambda) \cdot v(y, \lambda)$ de l'équation (I) est *oscillante* pour les grandes valeurs des variables x et y.

---

[5]) Voir: *Z. Butlewski*, Sur les intégrales d'une équation diff. du second ordre, *Mathematica*, Vol. 12 (1936) p. 37—38. *Cluj.*

Fite[6]) a démontré que si $p(t)>0$, $q(t)+\lambda r(t)>0$ pour $0<t_0\leqslant t<+\infty$ et

$$\int_{t_0}^{+\infty}\frac{dt}{p(t)}=+\infty,\quad \int_{t_0}^{+\infty}[q(t)+\lambda r(t)]\,dt=+\infty,$$

alors toute intégrale $w(t,\lambda)$ de l'équation (III) est oscillante dans l'intervalle $(t_0,+\infty)$.

En supposant que les intégrales de l'équation (III) soient oscillantes pour $0\leqslant t_0\leqslant t<+\infty$ nous obtenons[7]) (§ 1) entre autres les résultats suivants: si $p(t)\,[q(t)+\lambda r(t)]>0$ et 1° si $[p(q+\lambda r)]'<0$ pour $0<t_0\leqslant t<+\infty$, les valeurs absolues des extrêmes de l'intégrale $w(t,\lambda)$ de l'équation (III) sont croissantes lorsque t est croissante et λ = Const., 2° si $[p(q+\lambda r]'>0$ pour $0<t_0\leqslant t<+\infty$, les valeurs absolues des extrêmes de l'intégrale $w(t,\lambda)$, (λ = Const.) sont décroissantes lorsque t est croissante, alors l'intégrale $w(t,\lambda)$ est bornée lorsque $t\to+\infty$, 3° si $[p(q+\lambda r)]'=0$, alors les valeurs absolues des extrêmes de l'intégrale $w(t,\lambda)$ sont égales à une constante positive.

Dans la suite (§ 2) nous appliquons les résultats du § 1 à l'équation IIα) et IIβ) et obtenons les résultats analogues (théoremès II et III).

En utilisant des résultats du § 2 nous indiquons quelques propriétés de l'intégrale oscillante $z=z(x,y,\lambda)$ de l'équation (I). Entre autres nous obtenons (§ 3) les résultats suivants:

si $\quad A^{-1}(C+\lambda)>0$ pour $0<x_0\leqslant x<+\infty$,

$\quad A_1^{-1}(C_1+\lambda)>0$ pour $0<y_0\leqslant y<+\infty$

et de plus

1°) si $\quad (A'-2B)(C+\lambda)-AC'>0$ pour $0<x_0\leqslant x<+\infty$,

$\quad (A_1'-2B_1)(C_1+\lambda)-A_1C_1'>0$ pour $0<y_0\leqslant y<+\infty$,

---

[6]) *W. B. Fite*. Trans. Americ. Math. Soc. 19 (1918) 344—350.

[7]) Ces résultats dans la forme moins complète j'ai démontré dans mon article cité sous 5). Voir aussi: *E. Kamke*, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden u. Lösungen, T. 1 (1942) p. 130 (f).

alors les amplitudes de l'intégrale $z(x, y, \lambda)$ de l'équation (I) sont croissantes lorsque les variables x et y sont non décroissantes et la somme $x+y$ est croissante ($\lambda = \text{Const.}$),

2⁰) si $(A'-2B)(C+\lambda)-AC'<0$ pour $0<x_0 \leqslant x<+\infty$,
$(A_1'-2B_1)(C_1+\lambda)-A_1C_1'<0$ pour $0<y_0 \leqslant y<+\infty$,

alors les amplitudes de l'intégrale $z(x, y, \lambda)$ sont décroissantes lorsque les variables x et y sont non décroissantes et la somme $x+y$ est croissante; donc l'intégrale $z(x, y, \lambda)$ est bornée lorsque les variables x et y sont non decroissantes et $x+y \to +\infty$,

3⁰) si $(A'-2B)(C+\lambda)-AC'=0$ pour $0<x_0 \leqslant x<+\infty$,
$(A_1'-2B_1)(C_1+\lambda)-A_1C_1'=0$ pour $0<y_0 \leqslant y<+\infty$,

les amplitudes de l'intégrale $z(x, y, \lambda)$ sont égales à une constante positive.

Nous obtenons aussi quelques propriétés des dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Dans le § 4 nous nous occupons de l'équation différentielle

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

c'est-à-dire de l'équation d'une *corde vibrante.*
Nous supposons p. ex. que

$$a^2 = \frac{P(t)}{\varrho(x)},$$

où $P(t)$ désigne la tension, qui est une fonction de temps t et $\varrho(x)$ désigne la densité linéaire qui est une fonction de l'abscisse x.

L'équation (IV) est un cas particulier de l'équation (I). Alors nous obtenons pour l'équation (IV) les résultats analogues à ceux du § 3 pour l'équation (I).

§ 1. Considérons l'équation différentielle aux dérivées partielles du second ordre:

$$\text{(1)} \quad A(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial z}{\partial x} + C(x)z = A_1(y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + B_1(y)\frac{\partial z}{\partial y} + C_1(y)z,$$

où *les coefficients* $A(x)$, $B(x)$ *et* $C(x)$ *sont des fonctions continues de la variable réelle* x *pour* $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$; *les coefficients* $A_1(y)$, $B_1(y)$ *et* $C_1(y)$ *sont des fonctions continues de la variable réelle* y *pour* $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$.

Dans cet article je vais étudier une solution *particulière*

$$z(x, y) = u(x) \cdot v(y) \tag{2}$$

de l'équation (1) pour les grandes valeurs des variables x et y.

L'équation (1) prend alors la forme:

$$\begin{aligned} &\left[A(x)\frac{d^2u}{dx^2} + B(x)\frac{du}{dx} + C(x)u\right]v = \\ &= \left[A_1(y)\frac{d^2v}{dy^2} + B_1(y)\frac{dv}{dy} + C_1(y)v\right]u. \end{aligned} \tag{3}$$

L'équation (3) est, en particulier, remplie, si on a simultanément:

$$\begin{aligned} &\alpha)\quad A(x)\frac{d^2u}{dx^2} + B(x)\frac{du}{dx} + (C(x) + \lambda)u = 0 \\ &\beta)\quad A_1(y)\frac{d^2v}{dy^2} + B_1(y)\frac{dv}{dy} + (C_1(y) + \lambda)v = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

où λ est une constante $(-\infty < \lambda < +\infty)$.

Nous supposons ensuite que $A(x) \neq 0$ pour $0 < x_0 \leqslant x < + +\infty$ et $A_1(y) \neq 0$ pour $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$.

Multiplions les équations $(4, \alpha)$ et $(4, \beta)$ respectivement par

$$\frac{1}{A(x)} \exp \int_{x_0}^{x} \frac{B(x)}{A(x)}\, dx \quad \text{et} \quad \frac{1}{A_1(y)} \exp \int_{y_0}^{y} \frac{B_1(y)}{A_1(y)}\, dy\,.$$ [8]

Donc nous obtenons les équations suivantes:

$$\begin{aligned} &\alpha)\ \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} \exp \int_{x_0}^{x} \frac{B(x)}{A(x)}\, dx\right) + \frac{C(x)+\lambda}{A(x)} \left(\exp \int_{x_0}^{x} \frac{B(x)}{A(x)}\, dx\right) u = 0, \\ &\beta)\ \frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dy} \exp \int_{y_0}^{y} \frac{B_1(y)}{A_1(y)}\, dy\right) + \frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)} \left(\exp \int_{y_0}^{y} \frac{B_1(y)}{A_1(y)}\, dy\right) v = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

---

[8]) $\exp f(x) = e^{f(x)}$.

Les équations (5) sont des cas particuliers de l'équation

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dw}{dt}\right]+\left[q(t)+\lambda r(t)\right]w=0,\ p(t)>0,$$

c'est-à-dire l'équation de *Sturm-Liouville.*

Nous supposons dans la suite que les intégrales des équations (1), (4) et (6) sont *oscillantes* (cf. Introduction).

Désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ les zéros consécutifs de la solution $w(t, \lambda)$, qui sont plus grands que t_0 $(t_0<t_1<t_2<\ldots)$ et par τ_n $(t_n<\tau_n<t_{n+1})$ les zéros correspondants de la dérivée $w'(t, \lambda)$.

En multipliant l'équation différentielle (6) par $2p(t)w'(t,\lambda)$ et en intégrant l'égalité obtenue par parties entre les limites a et b on obtient l'équation:

$$(7)\ p^2(b)w'^2(b,\lambda)-p^2(a)w'^2(a,\lambda)+p(b)[q(b)+\lambda r(b)]w^2(b,\lambda)-$$
$$-p(a)[q(a)+\lambda r(a)]w^2(a,\lambda)=\int_a^b[(pq)'+\lambda(pr)']w^2(t,\lambda)\,dt.$$

Si $a=t_n$, $b=t_{n+1}$, alors $w(t_n, \lambda)=w(t_{n+1}, \lambda)=0$ et on peut écrire l'égalité (7) sous la forme suivante:

$$(8) \qquad p^2(t_{n+1})\,w'^2(t_{n+1},\lambda)-p^2(t_n)\,w'^2(t_n,\lambda)=$$
$$=\int_{t_n}^{t_{n+1}}[(pq)'+\lambda(pr)']\,w^2(t,\lambda)\,dt.$$

Si $(pq)'+\lambda(pr)'>0$ dans (t_n, t_{n+1}), le second membre de l'égalité (8) est manifestement positif. Il en résulte que

$$(9) \qquad |p(t_{n+1})\,w'(t_{n+1},\lambda)|>|p(t_n)\,w'(t_n,\lambda)|.$$

Si de plus $p'(t)\leqslant 0$, on aura

$$(10) \qquad |w'(t_{n+1},\lambda)|>|w'(t_n,\lambda)|.$$

Si $(pq)'+\lambda(pr)'<0$ et $p'(t)\geqslant 0$, les inégalités (9) et (10) sont remplacées par des inégalités contraires.
Si $(pq)'+\lambda(pr)'=0$, alors d'après (8) on a

$$|p(t_{n+1})\,w'(t_{n+1},\lambda)|=|p(t_n)\,w'(t_n,\lambda)|.$$

Si de plus $p(t) = \text{Const.}$ (donc $q + \lambda r = \text{Const.}$), on aura

$$|w'(t_{n+1}, \lambda)| = |w'(t_n, \lambda)|$$

Posons maintenant dans (7) $a = \tau_n$, $b = \tau_{n+1}$, nous aurons

$$(11) \qquad p(\tau_{n+1})[q(\tau_{n+1}) + \lambda r(\tau_{n+1})] w^2(\tau_{n+1}, \lambda) -$$

$$- p(\tau_n)[q(\tau_n) + \lambda r(\tau_n)] w^2(\tau_n, \lambda) = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} [(pq)' + \lambda (pr)'] w^2(t, \lambda)\, dt.$$

D'après (11) on a:

1° si $p(q + \lambda r) > 0$, $(pq)' + \lambda (pr)' > 0$, alors:

$$\sqrt{p(\tau_{n+1})[q(\tau_{n+1}) + \lambda r(\tau_{n+1})]}\; |w(\tau_{n+1}, \lambda)| >$$

$$> \sqrt{p(\tau_n)[q(\tau_n) + \lambda r(\tau_n)]}\; |w(\tau_n, \lambda)|;$$

2° si $p(q + \lambda r) > 0$, $(pq)' + \lambda (pr)' < 0$, alors:

$$\sqrt{p(\tau_{n+1})[q(\tau_{n+1}) + \lambda r(\tau_{n+1})]}\; |w(\tau_{n+1}, \lambda)| <$$

$$< \sqrt{p(\tau_n)[q(\tau_n) + \lambda r(\tau_n)]}\; |w(\tau_n, \lambda)|;$$

3° si $p(q + \lambda r) > 0$, $(pq)' + \lambda (pr)' = 0$, c'est-à-dire $pq + \lambda pr =$ $= \text{Const.}$ et positif, alors:

$$\sqrt{p(\tau_{n+1})[q(\tau_{n+1}) + \lambda r(\tau_{n+1})]}\; |w(\tau_{n+1}, \lambda)| =$$

$$= \sqrt{p(\tau_n)[q(\tau_n) + \lambda r(\tau_n)]}\; |w(\tau_n, \lambda)|$$

et par conséquent

$$|w(\tau_{n+1}, \lambda)| = |w(\tau_n, \lambda)|.$$

Ajoutons aux deux membres de l'égalité (11) la quantité $p(\tau_n)[q(\tau_n) + \lambda r(\tau_n)] w^2(\tau_{n+1}, \lambda)$; le résultat peut s'écrire

$$(12) \qquad p(\tau_n)[q(\tau_n) + \lambda r(\tau_n)][w^2(\tau_{n+1}, \lambda) - w^2(\tau_n, \lambda)] +$$

$$+ \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} [(pq)' + \lambda (pr)'][w^2(\tau_{n+1}, \lambda) - w^2(t, \lambda] \,dt = 0.$$

L'égalité (12) est évidemment impossible si $|w(\tau_{n+1}, \lambda)| \geqslant |w(\tau_n, \lambda)|$ et si $p(q + \lambda r) > 0$, $(pq)' + \lambda (pr)' > 0$.

Soustrayons maintenant des deux membres de l'égalité (11) la quantité $p(\tau_{n+1})\,[q(\tau_{n+1})+\lambda\, r(\tau_{n+1})]\, w^2(\tau_n, \lambda)$, il vient:

$$p(\tau_{n+1})\,[q(\tau_{n+1})+\lambda\, r(\tau_{n+1})]\,[w^2(\tau_{n+1}, \lambda)-w^2(\tau_n, \lambda)]+$$
$$+\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}[(pq)'+\lambda\,(pr)']\,[w^2(\tau_n, \lambda)-w^2(t, \lambda)]\,dt=0;$$

égalité impossible si $|w(\tau_{n+1}, \lambda)|\leqslant|w(\tau_n, \lambda)|$ et si $p(q+\lambda\, r)>0$, $(pq)'+\lambda\,(pr)'<0$.

En résumé nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Théorème I. 1) *Si* $p(t)\,q(t)+\lambda\, p(t)\, r(t)>0$, $[p(t)\,q(t)]'+\lambda\,[p(t)\, r(t)]'<0$ *pour* $0<t_0\leqslant t<+\infty$, *les suites*

$$\left\{\sqrt{p(\tau_n)\,[q(\tau_n)+\lambda\, r(\tau_n)]}\;|w(\tau_n, \lambda)|\right\},\quad \{|p(t_n)\, w'(t_n, \lambda)|\}$$

sont décroissantes, tandis que la suite $\{|w(\tau_n, \lambda)|\}$ *est croissante; si de plus* $p'(t)\geqslant 0$, *la suite* $\{|w'(t_n, \lambda)|\}$ *est décroissante.*

2) *Si* $p(t)\,q(t)+\lambda\, p(t)\, r(t)>0$, $[p(t)\,q(t)]'+\lambda\,[p(t)\, r(t)]'>0$ *pour* $0<t_0\leqslant t<+\infty$, *les suites*

$$\left\{\sqrt{p(\tau_n)\,[q(\tau_n)+\lambda\, r(\tau_n)]}\;|w(\tau_n, \lambda)|\right\},\quad \{|p(t_n)\, w'(t_n, \lambda)|\}$$

sont croissantes et la suite $\{|w(\tau_n, \lambda)|\}$ *est décroissante; si de plus* $p'(t)\leqslant 0$, *la suite* $\{|w'(t_n,\lambda)|\}$ *est donc croissante.*

3) *Si* $p(t)\,q(t)+\lambda\, p(t)\, r(t)=E>0$ *(E est une constante) pour* $0<t_0\leqslant t<+\infty$, *on a donc:*
$|p(t_n)\, w'(t_n, \lambda)|=F>0$, $|w(\tau_n, \lambda)|=G>0$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$, *(F, G sont des constantes); si de plus* $p(t)=Const.$ *pour* $0<t_0\leqslant t<+\infty$ *alors*
$|w'(t_n, \lambda)|=H>0$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$, *(H est une constante).*

En supposant que $p(t)\,q(t)+\lambda\, p(t)\, r(t)\geqslant m>0$, $(m=Const.)$, $[p(t)\,q(t)]'+\lambda\,[p(t)\, r(t)]'<0$ et d'après le théorème I, 1) on a les inégalités:

$$\sqrt{p(\tau_1)\,[q(\tau_1)+\lambda\, r(\tau_1)]}\;|w(\tau_1,\lambda)| >$$
$$> \sqrt{p(\tau_n)\,[q(\tau_n)+\lambda\, r(\tau_n)]}\;|w(\tau_n,\lambda)| \geqslant \sqrt{m}\,|w(\tau_n,\lambda)|.$$

Alors nous obtenons le

Corollaire I. *Si $p(t)\,q(t)+\lambda\,p(t)\,r(t)\geqslant m>0$ et $[p(t)\,q(t)]'+\lambda\,[p(t)\,r(t)]'<0$ pour $0<t_0\leqslant t<+\infty$, la suite $\{|w(\tau_n\,\lambda)|\}$ est croissante et bornée; la solution $w(t,\lambda)$ de l'équation (6) est donc bornée et ne tend pas vers zéro lorsque $t\to+\infty$.*

En supposant que $0<p(t)\,q(t)+\lambda\,p(t)\,r(t)\leqslant M<+\infty$ ($M=Const.$) et d'après le théorème I, 2) on a:

$$\sqrt{p(\tau_1)\,[q(\tau_1)+\lambda\, r(\tau_1)]}\;|w(\tau_1,\lambda)| <$$
$$<\sqrt{p(\tau_n)\,[q(\tau_n)+\lambda\, r(\tau_n)]}\;|w(\tau_n,\lambda)| \leqslant \sqrt{M}\,|w(\tau_n,\lambda)|$$

Alors nous obtenons le

Corollaire II. *Si $0<p(t)\,q(t)+\lambda\,p(t)\,r(t)\leqslant M<+\infty$ et $[p(t)\,q(t)]'+\lambda\,[p(t)\,r(t)]'>0$ pour $0<t_0\leqslant t<+\infty$, alors la suite $\{|w(\tau_n,\lambda)|\}$ est décroissante, mais ne tend pas vers zéro. La solution $w(t,\lambda)$ de l'équation (6) est donc bornée, mais ne tend pas vers zéro lorque $t\to+\infty$.*

§ 2. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ les zéros plus grands que x_0 d'une intégrale $u(x,\lambda)$ de l'équation différentielle (5, α), $x_0<x_1<x_2<\ldots$ Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ les zéros consécutifs de la dérivée $u'(x,\lambda)$ et soit $x_i<\xi_i<x_{i+1}$, ($i=1,2,\ldots$). Nous désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ les zéros consécutifs de l'intégrale $v(y,\lambda)$ de l'équation différentielle (5, β), $y_0<y_1<y_2<\ldots$ et par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ les zéros consécutifs de la dérivée $v'(y,\lambda)$ et soit $y_i<\eta_i<y_{i+1}$ ($i=1,2,\ldots$).

Nous pouvons maintenant appliquer les résultats du § 1. aux équations (5, α) et (5, β) qui sont des cas particuliers de l'équation (6).

Alors nous obtenons les résultats suivants:

Théorème II. 1) *Si*

$$\frac{C(x)+\lambda}{A(x)}>0, \quad [A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)>0$$

pour $0<x_0\leqslant x<+\infty$, *alors les suites*

$$\left\{\sqrt{\frac{C(\xi_n)+\lambda}{A(\xi_n)}}\left(\exp\int_{x_0}^{\xi_n}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)|u(\xi_n,\lambda)|\right\},$$

$$\left\{\left(\exp\int_{x_0}^{x_n}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)|u'(x_n,\lambda)|\right\}$$

sont décroissantes, tandis que la suite $\{|u(\xi_n,\lambda)|\}$ *est croissante; si de plus* $\frac{B(x)}{A(x)}\geqslant 0$, *la suite* $\{|u'(x_n,\lambda)|\}$ *est donc décroissante.*

2) *Si* $\frac{C(x)+\lambda}{A(x)}>0, [A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)<0$ *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$, *alors les suites*

$$\left\{\sqrt{\frac{C(\xi_n)+\lambda}{A(\xi_n)}}\left(\exp\int_{x_0}^{\xi_n}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)|u(\xi_n,\lambda)|\right\},$$

$$\left\{\left(\exp\int_{x_0}^{x_n}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)|u'(x_n,\lambda)|\right\}$$

sont croissantes et la suite $\{|u(\xi_n,\lambda)|\}$ *est décroissante; toute solution* $u(x,\lambda)$ *de l'équation* $(5,a)$ *est donc bornée lorsque* $x\to+\infty$. *Si de plus* $\frac{B(x)}{A(x)}\leqslant 0$, *la suite* $\{|u'(x_n,\lambda)|\}$ *est croissante.*

3) *Si* $\frac{C(x)+\lambda}{A(x)}>0, [A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)=0$ *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$, *donc:*

$$|u(\xi_1,\lambda)|=|u(\xi_2,\lambda)|=\ldots=|u(\xi_n,\lambda)|=\ldots.$$

Si de plus $B(x)=0$ *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$, *alors:*

$$|u'(x_1,\lambda)|=|u'(x_2,\lambda)|=\ldots=|u'(x_n,\lambda)|=\ldots.$$

En supposant que

$$\frac{C(x)+\lambda}{A(x)}\left(\exp 2\int\limits_{x_0}^{x}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)\geqslant p>0 \quad (p=Const.)$$

et d'aprés le Corollaire I nous obtenons le

Corollaire III. *Si*

$$\frac{C(x)+\lambda}{A(x)}>0,\ \frac{C(x)+\lambda}{A(x)}\left(\exp 2\int\limits_{x_0}^{x}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)\geqslant p>0$$

$[A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)>0$ *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$, *alors la suite* $\{|u(\xi_n,\lambda)|\}$ *est croissante et bornée; la solution* $u(x,\lambda)$ *de l'équation* $(5,\alpha)$ *est donc bornée et ne tend pas vers zéro lorsque* $x\to+\infty$.

En supposant que

$$0<\frac{C(x)+\lambda}{A(x)}\left(\exp 2\int\limits_{x_0}^{x}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)\leqslant P<+\infty \qquad (P=Const.)$$

et d'après le Corollaire II nous obtenons le

Corollaire IV. *Si*

$$\frac{C(x)+\lambda}{A(x)}>0, \quad 0<\frac{C(x)+\lambda}{A(x)}\left(\exp 2\int\limits_{x_0}^{x}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)\leqslant P<+\infty,$$

$[A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)<0$ *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$, *alors la suite* $\{|u(\xi_n,\lambda)|\}$ *est décroissante, mais ne tend pas vers zéro; la solution* $u(x,\lambda)$ *de l'équation* $(5,\alpha)$ *est donc bornée, mais ne tend pas vers zéro, lorsque* $x\to+\infty$.

En appliquant à l'équation $(5,\beta)$ le théorème I nous obtenons le

Théorème III. 1) *Si*

$$\frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)}>0,\ [A_1'(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C_1'(y)>0$$

pour $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors les suites:*

$$\left\{\sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}}\left(exp\int_{y_0}^{\eta_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right)|v(\eta_n,\lambda)|\right\},$$

$$\left\{\left(exp\int_{y_0}^{y_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right)|v'(y_n,\lambda)|\right\}$$

sont décroissantes, tandis que la suite $\{|v(\eta_n,\lambda)|\}$ *est croissante; si de plus* $\frac{B_1(y)}{A_1(y)}\geqslant 0$, *la suite* $\{|v'(y_n,\lambda)|\}$ *est décroissante.*

2) *Si* $\frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)}>0$, $[A_1'(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C_1'(y)<0$ *pour* $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors les suites:*

$$\left\{\sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}}\left(exp\int_{y_0}^{\eta_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right)|v(\eta_n,\lambda)|\right\},$$

$$\left\{\left(exp\int_{y_0}^{y_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right)|v'(y_n,\lambda)|\right\}$$

sont croissantes, tandis que la suite $\{|v(\eta_n,\lambda)|\}$ *est décroissante; toute solution* $v(y,\lambda)$ *de l'équation* (5, β) *est donc bornée lorsque* $y\to+\infty$. *Si de plus* $\frac{B_1(y)}{A_1(y)}\leqslant 0$, *la suite* $\{|v'(y_n,\lambda)|\}$ *est donc croissante.*

3) *Si* $\frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)}>0$, $[A_1'(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C_1'(y)=0$ *pour* $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors on a:*

$$|v(\eta_1,\lambda)|=|v(\eta_2,\lambda)|=\ldots=|v(\eta_n,\lambda)|=\ldots.$$

Si de plus $B_1(y)=0$ *pour* $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors:*

$$|v'(y_1,\lambda)|=|v'(y_2,\lambda)|=\ldots=|v'(y_n,\lambda)|=\ldots.$$

En désignant par q et Q deux nombres constants nous obtenons d'après le théorème III deux corollaires suivants:

Corollaire V. *Si*

$$\frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)}>0,\quad \frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)}\left(exp\,2\int_{y_0}^{y}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right)\geqslant q>0,$$

$[A_1'(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C_1(y)>0$ pour $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors la suite* $\{|v[\eta_n, \lambda)|\}$ *est croissante et bornée; la solution* $v(y, \lambda)$ *de l'équation* (5, β) *est donc bornée, mais ne tend pas vers zéro lorsque* $y\to+\infty$.

Corollaire VI. *Si*

$$\frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)}>0, \quad 0<\frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)}\left(exp\, 2\int_{y_0}^{y}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}\,dy\right)\leqslant Q<+\infty,$$

$[A_1'(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C_1'(y)<0$ *pour* $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors la suite* $\{|v(\eta_n, \lambda)|\}$ *est décroissante, mais ne tend pas vers zéro; la solution* $v(y, \lambda)$ *de l'équation* (5, β) *est donc bornée, mais ne tend pas vers zéro lorsque* $y\to+\infty$.

§ 3. De la relation

$$z(x, y, \lambda)=u(x, \lambda)\cdot v(y, \lambda)$$

il s'ensuit que chaque zéro de la fonction u et v annule z, on a donc:

$$z(x_m, y, \lambda)=0, \qquad z(x, y_n, \lambda)=0 \qquad (m, n=1, 2, 3, \ldots).$$

D'après les égalités:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=\xi_m,\ y=\eta_n}=u'(\xi_m, \lambda)\, v(\eta_n, \lambda)=0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad (m, n=1, 2, 3, \ldots)$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=\xi_m,\ y=\eta_n}=u(\xi_m, \lambda)\, v'(\eta_n, \lambda)=0$$

on voit que la fonction $z=z(x, y, \lambda)$ possède les extrêmes dans les points (ξ_m, η_n), $(m, n=1, 2, 3, \ldots)$.

Nous avons les égalités suivantes:

$$\text{a)}\quad \sqrt{\frac{C(\xi_m)+\lambda}{A(\xi_m)}}\left[exp\int_{x_0}^{\xi_m}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right]u(\xi_m, \lambda)\cdot$$
$$\cdot\sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}}\left[exp\int_{y_0}^{\eta_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}\,dy\right]v(\eta_n, \lambda)=$$
$$=\sqrt{\frac{[C(\xi_m)+\lambda]\,[C_1(\eta_n)+\lambda]}{A(\xi_m)\,A_1(\eta_n)}}\cdot$$

$$\cdot \left[exp\left(\int_{x_0}^{\xi_m} \frac{B(x)}{A(x)}\, dx + \int_{y_0}^{\eta_n} \frac{B_1(y)}{A_1(y)}\, dy\right)\right] z\,(\xi_m, \eta_n, \lambda);$$

b) $$u\,(\xi_m, \lambda) \cdot v\,(\eta_n, \lambda) = z\,(\xi_m, \eta_n, \lambda);$$

(12)

c) $$\sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}}\left[exp \int_{y_0}^{\eta_n} \frac{B_1(y)}{A_1(y)}\, dy\right] u'\,(x_m, \lambda)\, v\,(\eta_n, \lambda) =$$

$$= \sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}}\left[exp \int_{y_0}^{\eta_n} \frac{B_1(y)}{A_1(y)}\, dy\right] \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_m\\ y=\eta_n}}$$

d) $$\sqrt{\frac{C(\xi_m)+\lambda}{A(\xi_m)}}\left[exp \int_{x_0}^{\xi_m} \frac{B(x)}{A(x)} dx\right] u\,(\xi_m, \lambda)\, v'\,(y_n, \lambda) =$$

$$= \sqrt{\frac{C(\xi_m)+\lambda}{A(\xi_m)}}\left[exp \int_{x_0}^{\xi_m} \frac{B(x)}{A(x)} dx\right] \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi_m\\ y=y_n}}$$

$(m,\ n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$.

Les premiers membres des égalités (12) sont des expressions qui figurent dans les théorèmes II et III.

En utilisant des proprietés bien connues des suites doubles, nous pouvons appliquer les théorèmes II, 1), 3) et III, 1), 3) aux égalités (12).

Nous dirons qu'une suite double $\{a_{m,n}\}$ est *croissante* (*décroissante*) au sens strict lorsqu'on a : $a_{m+1,n} > a_{m,n}$, $(a_{m+1,n} < a_{m,n})$ et aussi $a_{m,n+1} > a_{m,n}$, $(a_{m,n+1} < a_{m,n})$ pour $m, n = 1, 2, \ldots$. Alors nous obtenons le

Théorème IV. Si $\frac{C(x)+\lambda}{A(x)} > 0$, $\frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)} > 0$

$$[A'(x) - 2B(x)]\,[C(x)+\lambda] - A(x)\,C'(x) > 0\ (\geqslant 0)$$

$$[A_1'(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C_1'(y)\geqslant 0\ (>0)$$
pour $0<x_0\leqslant x<+\infty,\ 0<y_0\leqslant y<+\infty$[9]),
alors:

1) *la suite double (comp. 12, a)*

$$\left\{\sqrt{\frac{[C(\xi_m)+\lambda][C_1(\eta_n)+\lambda]}{A(\xi_m)A_1(\eta_n)}}\left[exp\left(\int_{x_0}^{\xi_m}\frac{B(x)}{A(x)}dx+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\int_{y_0}^{\eta_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right)\right]|z(\xi_m,\eta_n,\lambda)|\right\}$$

est décroissante au sens strict:

2) *la suite double (comp. 12, b)*

$$\{|z(\xi_m,\eta_n,\lambda)|\}$$

est croissante au sens strict;

3) *si de plus* $\frac{B(x)}{A(x)}\geqslant 0$ *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$, *alors la suite double (comp. 12, c)*

$$\left\{\sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}}\left[exp\int_{y_0}^{\eta_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right]\left|\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_m\\ y=\eta_n}}\right|\right\}$$

est décroissante au sens strict;

4) *si de plus* $\frac{B_1(y)}{A_1(y)}\geqslant 0$ *pour* $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors la suite double (comp. 12, d)*

---

[9]) La notation:
$$[A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)>0(\geqslant 0)$$
$$[A'_1(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C'_1(y)\geqslant 0(>0)$$
exprime que l'on a:
soit
$$[A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)>0,$$
$$[A'_1(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C'_1(y)\geqslant 0,$$
soit
$$[A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)\geqslant 0,$$
$$[A'_1(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C'_1(y)>0.$$
Nous appliquons une notation analogue dans les théorèmes qui suivent plus bas.

$$\left\{ \sqrt{\frac{C(\xi_m)+\lambda}{A(\xi_m)}} \left[exp \int_{x_0}^{\xi_m} \frac{B(x)}{A(x)} dx \right] \left| \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{\substack{x=\xi_m \\ y=y_n}} \right| \right\}$$

est décroissante au sens strict.

Supposons maintenant que

$$\text{(13)} \qquad \frac{[C(x)+\lambda]\,[C_1(y)+\lambda]}{A(x)\,A_1(y)} \left[exp\,(2 \int_{x_0}^{x} \frac{B(x)}{A(x)} dx + \right.$$

$$\left. + 2 \int_{y_0}^{y} \frac{B_1(y)}{A_1(y)}\,dy) \right] \geqslant k > 0, \quad (k = Const.)$$

pour $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$, $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$. D'après le théorème IV, 1) on a les inégalités

$$\sqrt{\frac{[C(\xi_1)+\lambda]\,[C_1(\eta_1)+\lambda]}{A(\xi_1)\,A_1(\eta_1)}} \left[exp \left(\int_{x_0}^{\xi_1} \frac{B(x)}{A(x)} dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{y_0}^{\eta_1} \frac{B_1(y)}{A_1(y)} dy \right) \right] |\, z(\xi_1, \eta_1, \lambda)\,| \geqslant \sqrt{k}\; |\, z(\xi_m, \eta_n, \lambda)\,|.$$

D'après le théorème IV nous obtenons donc le

Corollaire VII. *Si* $\dfrac{C(x)+\lambda}{A(x)} > 0$, $\dfrac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)} > 0$,

$$[A'(x) - 2B(x)]\,[C(x)+\lambda] - A(x)\,C'(x) > 0 \;(\geqslant 0),$$
$$[A_1'(y) - 2B_1(y)][C_1(y)+\lambda] - A_1(y)\,C_1'(y) \geqslant 0 \;(> 0)$$

pour $0 < x_0 \leqslant x < +\infty, 0 < y_0 \leqslant y < +\infty$, *et si la condition* (13) *est remplie, les valeurs absolues des extrêmes de la solution* $z = z(x, y, \lambda)$ *de l'équation* (1) *sont croissantes et bornées lorsque les variables x et y croissent au sens large, tandis que* $x + y$ *croit au sens strict. L'intégrale* $z = z(x, y, \lambda)$ *est donc bornée lorsque x et y croissent au sens large et* $x + y \to +\infty$.

En appliquant dans la suite les résultats des théorèmes II, 2), 3) et III, 2), 3) nous obtenons d'après (12) le

Théorème V. *Si* $\dfrac{C(x)+\lambda}{A(x)}>0,\quad \dfrac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)}>0$,

$$[A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)<0\,(\leqslant 0),$$

$$[A_1'(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C_1'(y)\leqslant 0\,(<0)$$

pour $0<x_0\leqslant x<+\infty$, $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors:*

1) *la suite double (comp. 12a)*

$$\left\{\sqrt{\frac{[C(\xi_m)+\lambda]\,[C_1(\eta_n)+\lambda]}{A(\xi_m)\,A_1(\eta_n)}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\exp\left(\int_{x_0}^{\xi_m}\frac{B(x)}{A(x)}dx+\int_{y_0}^{\eta_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right)\right]|z(\xi_m,\eta_n,\lambda)|\right\}$$

est croissante au sens strict;

2) *la suite double (comp. 12b)*

$$\{|z(\xi_m,\eta_n,\lambda)|\}$$

est décroissante au sens strict. La solution $z=z(x,y,\lambda)$ *de l'équation* (1) *est donc bornée lorsque les variables* x *et* y *croissent au sens large et* $x+y\to+\infty$;

3) *si de plus* $\dfrac{B(x)}{A(x)}\leqslant 0$ *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$, *alors la suite double (comp. 12c)*

$$\left\{\sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}}\left[\exp\int_{y_0}^{\eta_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right]\left|\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_m\\ y=\eta_n}}\right|\right\}$$

est croissante au sens strict;

4) *si de plus* $\dfrac{B_1(y)}{A_1(y)}\leqslant 0$ *pour* $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors la suite double (comp. 12d)*

$$\left\{\sqrt{\frac{C(\xi_m)+\lambda}{A(\xi_m)}}\left[\exp\int_{x_0}^{\xi_m}\frac{B(x)}{A(x)}dx\right]\left|\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi_m\\ y=y_n}}\right|\right\}$$

est croissante au sens strict.

Supposons maintenant que

$$14)\qquad \frac{[C(x)+\lambda]\,[C_1(y)+\lambda]}{A(x)\,A_1(y)}\cdot\left[exp\left(2\int_{x_0}^{x}\frac{B(x)}{A(x)}dx+ + 2\int_{y_0}^{y}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right)\right]\leqslant K<+\infty,\ (K=Const.)$$

D'après le théorème (V, 1) nous avons l'inégalité:

$$15)\qquad \sqrt{\frac{[C(\xi_1)+\lambda]\,[C_1(\eta_1)+\lambda]}{A(\xi_1)\,A_1(\eta_1)}\left[exp\left(\int_{x_0}^{\xi_1}\frac{B(x)}{A(x)}dx+ + \int_{y_0}^{\eta_1}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}dy\right)\right]}\,|z(\xi_1,\eta_1,\lambda)|\leqslant\sqrt{K}\,|z(\xi_m,\eta_n,\lambda)|.$$

En tenant compte du théorème (V, 2) et d'après (15) nous obtenons le

Corollaire VIII. Si $\frac{C(x)+\lambda}{A(x)}>0,\quad \frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)}>0,$

$[A'(x)-2B(x)]\,[C(x)+\lambda]-A(x)\,C'(x)<0\ (\leqslant 0),$

$[A_1'(y)-2B_1(y)]\,[C_1(y)+\lambda]-A_1(y)\,C_1'(y)\leqslant 0\ (<0)$

pour $0<x_0\leqslant x<+\infty$, $0<y_0\leqslant y<+\infty$ *et si la condition* (14) *est remplie, alors les valeurs absolues des extrêmes de la solution* $z=z(x,y,\lambda)$ *de l'équation* (1) *sont décroissantes, mais ne tendent pas vers zéro, lorsque les variables* x *et* y *croissent au sens large, tandis que* $x+y$ *croit au sens strict. La solution* $z=z(x,y,\lambda)$ *est donc bornée et ne tend pas vers zéro lorsque* x *et* y *croissent au sens large et* $x+y\to+\infty$.

Considérons maintenant les relations suivantes:

$$a)\qquad \left[exp\int_{x_0}^{x_m}\frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right]u'(x_m,\lambda)\,v(\eta_n,\lambda)= =\left[exp\int_{x_0}^{x_m}\frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_m\\ y=\eta_n}}$$

$$\text{b)}\quad \left[exp \int_{y_0}^{y} \frac{B_1(y)}{A_1(y)} dy\right] u(\xi_m, \lambda)\, v'(y_n, \lambda) =$$

(16)

$$= \left[exp \int_{y_0}^{y_n} \frac{B_1(y)}{A_1(y)} dy\right] \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=\xi_m \\ y=y_n}}$$

$$\text{c)}\quad \sqrt{\frac{C(\xi_m)+\lambda}{A(\xi_m)}} \left[exp \int_{x_0}^{\xi_m} \frac{B(x)}{A(x)} dx\right] u(\xi_m, \lambda)\, v(\eta_n, \lambda) =$$

$$= \sqrt{\frac{C(\xi_m)+\lambda}{A(\xi_m)}} \left[exp \int_{x_0}^{\xi_m} \frac{B(x)}{A(x)} dx\right] z(\xi_m, \eta_n, \lambda)$$

$$\text{d)}\quad \sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}} \left[exp \int_{y_0}^{\eta_n} \frac{B_1(y)}{A_1(y)} dy\right] u(\xi_m, \lambda)\, v(\eta_n, \lambda) =$$

$$= \sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}} \left[exp \int_{y_0}^{\eta_n} \frac{B_1(y)}{A_1(y)} dy\right] z(\xi_m, \eta_n, \lambda).$$

D'après les théorèmes II, 1), 3) et III, 2), 3) et les relations (16) nous obtenons le

Théorème VI. *Si* $\dfrac{C(x)+\lambda}{A(x)} > 0$, $\dfrac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)} > 0$,

$[A'(x) - 2B(x)]\,[C(x)+\lambda] - A(x)\,C'(x) > 0 \; (\geqslant 0)$,

$[A_1'(y) - 2B_1(y)]\,[C_1(y)+\lambda] - A_1(y)\,C_1'(y) \leqslant 0 \; (< 0)$

pour $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$, $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$, *alors:*

1) *la suite double (comp. 16 a)*

$$\left\{\left[exp \int_{x_0}^{x_m} \frac{B(x)}{A(x)} dx\right] \left|\frac{\partial z(x_m, \eta_n, \lambda)}{\partial x}\right|\right\}$$

est décroissante au sens strict; si de plus $\dfrac{B(x)}{A(x)} \geqslant 0$ *pour* $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$, *alors la suite double*

$$\left\{\left|\frac{\partial z(x_m, \eta_n, \lambda)}{\partial x}\right|\right\}$$

est décroissante au sens strict;

2) *la suite double (comp. 16b)*

$$\left\{\left[\exp\int_{y_0}^{y_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}\,dy\right]\left|\frac{\partial z(\xi_m, y_n, \lambda)}{\partial y}\right|\right\}$$

est croissante au sens strict; si de plus $B_1(y): A_1(y) \leqslant 0$ pour $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$, *alors la suite double*

$$\left\{\left|\frac{\partial z(\xi_m, y_n, \lambda)}{\partial y}\right|\right\}$$

est croissante au sens strict;

3) *la suite double (comp. 16c)*

$$\left\{\sqrt{\frac{C(\xi_m)+\lambda}{A(\xi_m)}}\left[\exp\int_{x_0}^{\xi_m}\frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right]|z(\xi_m, \eta_n, \lambda)|\right\}$$

est décroissante au sens strict;

4) *la suite double (comp. 16d)*

$$\left\{\sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}}\left[\exp\int_{y_0}^{\eta_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}\,dy\right]|z(\xi_m, \eta_n, \eta)|\right\}$$

est croissante au sens strict;

5) *Les extrêmes absolus de la solution* $z = z(x, y, \lambda)$ *de l'équation* (1) *sont:* 1⁰ *non décroissants pour* $x \to +\infty$ *et* $y = \mu > 0$, ($\mu \geqslant y_0$, $\mu =$ *Const.*), 2⁰ *non croissants pour* $x = \nu$, ($\nu \geqslant x_0$, $\nu =$ Const.) *et* $y \to +\infty$.

D'après les théorèmes II, 2), 3) et III, 1), 3) et les relations (16) nous obtenons le

Théorème VII. Si $\frac{C(x)+\lambda}{A(x)} > 0$, $\frac{C(y)+\lambda}{A_1(y)} > 0$,

$$[A'(x)-2B(x)]\,[C(x)+\lambda]-A(x)\,C'(x)<0\ (\leqslant 0)$$

$$[A_1'(y)-2B_1(y)]\,[C_1(y)+\lambda]-A_1(y)\,C_1'(y)\geqslant 0\ (>0)$$

pour $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$, $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$, *alors:*

1) *la suite double (comp. 16a)*

$$\left\{\left[\exp\int_{x_0}^{x_m}\frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right]\left|\frac{\partial z(x_m, \eta_n, \lambda)}{\partial x}\right|\right\}$$

est croissante au sens strict; si de plus $B(x):A(x)\leqslant 0$ *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$, *alors la suite double*

$$\left\{\left|\frac{\partial z(x_m, \eta_n, \lambda)}{\partial x}\right|\right\}$$

et croissante au sens strict;

2) *la suite double (comp. 16 b)*

$$\left\{\left(exp\int\limits_{y_0}^{y_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}\,dy\right)\left|\frac{\partial z(\xi_m, y_n, \lambda)}{\partial y}\right|\right\}$$

est décroissante au sens strict; si de plus $B_1(y):A_1(y)\geqslant 0$ *pour* $0<y_0\leqslant y<+\infty$, *alors la suite double*

$$\left\{\left|\frac{\partial z(\xi_m, y_n, \lambda)}{\partial y}\right|\right\}$$

est décroissante au sens strict;

3) *la suite double (comp. 16 c)*

$$\left\{\sqrt{\frac{C(\xi_m)+\lambda}{A(\xi_m)}}\left[exp\int\limits_{x_0}^{\xi_m}\frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right]|z(\xi_m, \eta_n, \lambda)|\right\}$$

est croissante au sens strict;

4) *la suite double (comp. 16 d)*

$$\left\{\sqrt{\frac{C_1(\eta_n)+\lambda}{A_1(\eta_n)}}\left[exp\int\limits_{y_0}^{\eta_n}\frac{B_1(y)}{A_1(y)}\,dy\right]|z(\xi_m, \eta_n, \lambda)|\right\}$$

est décroissante au sens strict;

5) *les valeurs absolues des extrêmes de la solution* $z=z(x,y,\lambda)$ *de l'équation* (1) *sont:* 1^0 *non croissantes si* $x\to\infty$, $y=\nu\ (\nu\geqslant y_0)$; 2^0 *non décroissantes si* $x=\mu\ (\mu\geqslant x_0)$, $y\to+\infty$.

Nous avons les relations suivantes:

$$\begin{aligned} &u(\xi_m, \lambda)\cdot v(\eta_n, \lambda)=z(\xi_m, \eta_n, \lambda)\\ (17)\qquad &u'(x_m, \lambda)\cdot v(\eta_n, \lambda)=\frac{\partial z(x_m, \eta_n, \lambda)}{\partial x}\\ &u(\xi_m, \lambda)\cdot v'(y_n, \lambda)=\frac{\partial z(\xi_m, y_n, \lambda)}{\partial y}\end{aligned}$$

D'après les théorèmes II, 3) et III, 3 et les relations (17) nous obtenos le

Corollaire IX. *Si* $\frac{C(x)+\lambda}{A(x)} > 0, \quad \frac{C_1(y)+\lambda}{A_1(y)} > 0,$

$$[A'(x)-2B(x)][C(x)+\lambda]-A(x)C'(x)=0,$$
$$[A_1'(y)-2B_1(y)][C_1(y)+\lambda]-A_1(y)C_1'(y)=0$$

pour $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$, $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$, alors

1) $$|z(\xi_m, \eta_n, \lambda)| = \alpha > 0;$$

2) *si de plus* $B(x) \equiv 0$ *pour* $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$. *alors*

$$\left|\frac{\partial z(x_m, \eta_n, \lambda)}{\partial x}\right| = \beta > 0;$$

3) *si de plus* $B_1(y) \equiv 0$ *pour* $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$, *alors*

$$\left|\frac{\partial z(\xi_m, y_n), \lambda}{\partial y}\right| = \gamma > 0;$$

où $m, n = 1, 2, 3, \dots$ *et* α, β, γ *sont des constantes.*

§ 4. Considérons maintenant l'équation différentielle de la *corde vibrante*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{18}$$

Le déplacement z normal à la corde d'un point d'abscisse x, à l'instant t, est une fonction des variables x et t qui vérifie l'équation (18).

Supposons par exemple que

$$a^2 = \frac{P(t)}{\varrho(x)},$$

où $P(t)$ designe la tension de la corde vibrante, $\varrho(x)$ désigne la densité linéaire de la corde vibrante. La tension $P(t)$ ne dépend que du temps t; la densité $\varrho(x)$ ne dépend que de l'abscisse x.

On peut écrire l'équation (18) sous la forme suivante:

$$\frac{1}{\varrho(x)} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{P(t)} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{19}$$

Nous supposons que $\varrho(x)$ *soit une fonction postive, continue et dérivable de la variable* x *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$; $P(t)$ *est une fonction positive, continue et dérivable de la variable* t *pour* $0<t_0\leqslant t<+\infty$.

L'équation (19) est un cas particulier de l'équation (1), où l'on pose:

$$A(x)\equiv\frac{1}{\varrho(x)},\quad A_1(y)\equiv\frac{1}{P(y)},\quad y=t.$$
$$B(x)\equiv C(x)\equiv B_1(y)\equiv C_1(y)\equiv 0.$$

Nous pouvons donc appliquer les résultats du § 3 à l'équation (19). Nous supposons dans ces résultats que $\lambda>0$. Les zéros de la solution $z\,(x,t,\lambda)$ de l'équation (19) forment le réseau réctangulaire:

$$z\,(x_i,\,t,\,\lambda)=0,\quad z\,(x,\,t_i,\,\lambda)=0,\qquad (i=1,\,2,\,3,\ldots),$$

où l'on a: $x_0<x_1<x_2<\ldots,\quad t_0<t_1<t_2<\ldots.$

Supposons ensuite que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=\xi_i}=0,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{t=\tau_i}=0,\qquad (i=1,2,3,\ldots),$$

où

$$x_i<\xi_i<x_{i+1},\quad t_i<\tau_i<t_{i+1}.$$

En appliquant le théorème IV à l'équation (19) nous obtenons le

Théorème VIII. *Si* $\varrho(x)>0$, $\varrho'(x)<0\,(\leqslant 0)$ *pour* $0<x_0\leqslant\leqslant x<+\infty$; $P(t)>0$, $P'(t)\leqslant 0\,(<0)$ *pour* $0<t_0\leqslant t<+\infty$, $\lambda>0$, *alors les suites doubles*:

$$\left\{\sqrt{\varrho\,(\xi_m)\;P\,(\tau_n)}\;\;|z\,(\xi_m,\,\tau_n,\,\lambda)|\right\},$$

$$\left\{\sqrt{P\,(\tau_n)}\left|\frac{\partial z\,(x_m,\,\tau_n,\,\lambda)}{\partial x}\right|\right\}\cdot\quad\left\{\sqrt{\varrho\,(\xi_m)}\left|\frac{\partial z\,(\xi_m,\,t_n,\,\lambda)}{\partial t}\right|\right\}$$

sont décroissantes au sens strict et la suite double

$$\left\{|z\,(\xi_m,\,\tau_n,\,\lambda)|\right\}$$

est croissante au sens strict.

D'après le corollaire VII nous obtenons dans le cas de l'équation (19) le

Corollaire X. *Si* $\lambda \varrho(x) \geqslant k_1 > 0$, $\varrho'(x) < 0$ $(\leqslant 0)$ *pour* $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$; $\lambda P(t) \geqslant k_2 > 0$, $P'(t) \leqslant 0$ (< 0) *pour* $0 < t_0 \leqslant t < +\infty$, ($k_1$, k_2 *sont des constantes*, $\lambda > 0$), *alors les valeurs absolues des extrêmes de la solution* $z = z(x, t, \lambda)$ *de l'équation* (19) *sont croissantes et bornées lorsque* x, t *croissent au sens large et* $x + t \to +\infty$.

En appliquant le théorème V à l'équation (19) nous obtenons le

Théorème IX. *Si* $\varrho(x) > 0$, $\varrho'(x) > 0$ $(\geqslant 0)$ *pour* $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$; $P(t) > 0$, $P'(t) \geqslant 0$ (> 0) *pour* $0 < t_0 \leqslant t < +\infty$; *alors les suites doubles:*

$$\left\{ \sqrt{\varrho(\xi_m) P(\tau_n)} \, |z(\xi_m, \tau_n, \lambda)| \right\},$$

$$\left\{ \sqrt{P(\tau_n)} \left| \frac{\partial z(x_m, \tau_n, \lambda)}{\partial x} \right| \right., \quad \left\{ \sqrt{\varrho(\xi_m)} \left| \frac{\partial z(\xi_m, t_n, \lambda)}{\partial t} \right| \right\}$$

sont croissantes et la suite double

$$\left\{ |z(\xi_m, \tau_n, \lambda)| \right\}$$

est décroissante au sens strict; les valeurs absolues des extrêmes de la solution $z = z(x, t, \lambda)$ *de l'équation* (19) *sont bornées, lorsque les variables* x, t *croissent au sens large et* $x + t \to \infty$.

Le corollaire VIII dans le cas de l'équation (19) prend la forme suivante:

Corollaire XI. *Si* $0 < \lambda \varrho(x) \leqslant K_1 < +\infty$, $\varrho'(x) > 0$ $(\geqslant 0)$ *pour* $0 < x_0 \leqslant x < +\infty$, $0 < \lambda P(t) \leqslant K_2 < +\infty$, $P'(t) \geqslant 0$ (> 0) *pour* $0 < t_0 \leqslant t < +\infty$, ($K_1$, K_2 *sont des constantes*, $\lambda > 0$), *les valeurs absolues des extrêmes de la solution* $z = z(x, t, \lambda)$ *de l'équation* (19) *sont décroissantes, mais ne tendent pas vers zéro, lorsque les variables* x, t *croissent au sens large et* $x + t \to +\infty$.

Supposons maintenant que $\varrho(x)=\mu>0$ pour $0<x_0\leqslant x<+\infty$; $P(t)=\nu>0$ pour $0<t_0\leqslant t<+\infty$, (μ, ν — sont des constantes), c'est-à-dire la corde vibrante est homogène et la tension est une constante, alors en appliquant à l'équation (19) le corollaire IX nous obtenons le

Corollaire XII. *Si* $\varrho(x)=\mu>0$ *pour* $0<x_0\leqslant x<+\infty$, $P(t)=\nu>0$ *pour* $0<t_0\leqslant t<+\infty$, $\lambda>0$, *alors:*

1) $$\left| z(\xi_m, \eta_n, \lambda) \right| = \alpha > 0 ,$$

2) $$\left| \frac{\partial z(x_m, \eta_n, \lambda)}{\partial x} \right| = \beta > 0 ,$$

3) $$\left| \frac{\partial z(\xi_m, y_n, \lambda)}{\partial y} \right| = \gamma > 0 ,$$

où $m, n=1,2,3\ldots$ *et* α, β, γ *sont des constantes.*

Dans ce cas, l'équation (19) est de la forme

(20) $$\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{\nu}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

L'intégrale particulière de l'équation (20) est:

(21)
$$z(x,t)=(a\cos\sqrt{\lambda\mu}\,x+b\sin\sqrt{\lambda\mu}\,x)\,(c\cos\sqrt{\lambda\mu}\,t+d\sin\sqrt{\lambda\mu}\,t),$$
où a, b, c, d sont des constantes d'intégration et λ est une constante arbitraire, positive.

Les résultats du corollaire XII sont les mêmes que les propriétés analogues de l'intégrale (21).

SUR LES COEFFICIENTS DES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIVALENTES DANS LE CERCLE ET LES POINTS EXTREMAUX DES ENSEMBLES

Par

F. LEJA (Kraków).

1. Soit

(1) $$y = f(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \dots, \quad \text{où } c_1 > 0$$

une fonction holomorphe univalente dans le cercle $K\{|x|<1\}$, Désignons par Δ le domaine parcouru par y lorsque x varie dans K, par Γ la frontière de Δ et soient D et F les images de Δ et Γ respectivement dans le plan de la variable

$$z = \frac{1}{y}.$$

D'autre part, soit C l'ensemble complémentaire à $D+F$ par rapport au plan de z.

Il est clair que D est un domaine simplement connexe contenant le point $z=\infty$, F est un continu borné et C est un ensemble ouvert borné ou vide. La somme $F+C$ contient toujours le point $z=0$ et le diamètre transfini de F que je désignerai par

$$d(F),$$

est positif.

Les coefficients $c_1, c_2, \dots$ de la série (1) dépendent naturellement du domaine Δ et par suite de la frontière F du domaine D. Le but de cette note est d'examiner cette dépendance.

2. Soit n un nombre entier fixe plus grand que 1 et

$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

un système de n points quelconques de F. Désignons par $V(z_1,z_2,\dots,z_n)$ le produit de toutes les distances mutuelles de ces points

(2) $$V(z_1, z_2,\dots, z_n) = \prod_{1\leqslant j<k\leqslant n} |z_j - z_k|$$

et par $\Delta_j(z_1, z_2,\dots, z_n)$ le produit

$$\Delta_j(z_1, z_2,\dots, z_n) = \prod_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{n} |z_j - z_k|, \quad j=1,2,\dots,n.$$

Il est clair que, lorsque les points $z_1, z_2,\dots, z_n$ varient dans F, le produit (2) atteint un maximum. Soit

(3) $$\eta_{1n}, \eta_{2n},\dots, \eta_{nn}$$

un système de n points de F en lesquels ce maximum est atteint; on a donc

(4) $$V(\eta_{1n},\dots, \eta_{nn}) \geqslant V(z_1,\dots, z_n) \text{ pour tous les } z_k \in F.$$

Nous supposerons encore que les indices des points (3) soient choisis de manière qu'on ait

(5) $$\Delta_1(\eta_{1n},\dots, \eta_{nn}) \leqslant \Delta_2(\eta_{1n},\dots, \eta_{nn}) \leqslant \dots \leqslant \Delta_n(\eta_{1n},\dots, \eta_{nn}).$$

Un systeme (3) de points de F, remplissant les conditions (4) et (5), sera dit *n-ième système extremal* de l'ensemble F[1]).

Les points particuliers du système (3) seront dits *points extrémaux* de F. En faisant varier n on formera une suite triangulaire de points

(6) $$\begin{array}{l} \eta_{12}, \eta_{22} \\ \eta_{13}, {}_{23}, \eta_{33} \\ \eta_{14}, \eta_{24}, \eta_{34}, \eta_{44} \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

dont chaque ligne contient un système extrémal de points de F.

Faisons maintenant correspondre au système extrémal (3) le polynome du degré $n-1$ suivant

[1]) Le système (3) peut être unique ou non.

$$L_{n-1}(z) = \frac{(z-\eta_{2n})(z-\eta_{3n})\dots(z-\eta_{nn})}{(\eta_{1n}-\eta_{2n})(\eta_{1n}-\eta_{3n})\dots(\eta_{1n}-\eta_{nn})}, \quad n=2,3,\dots$$

et désignons le prémier des produits (5) plus brièvement par $\varDelta_{n-1}$

$$\varDelta_{n-1} = \varDelta_1(\eta_{1n}, \dots, \eta_{nn}), \qquad n=2,3,\dots$$

J'ai démontré ailleurs[2]) que:

1° La suite $\left\{\sqrt[n-1]{\varDelta_{n-1}}\right\}$ converge vers le diamètre transfini de F

(7) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{\varDelta_{n-1}} = d(F).$$

2° La suite $\left\{\sqrt[n-1]{|L_{n-1}(z)|}\right\}$ converge en dehors de F

(8) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{L_{n-1}(z)} = L(z,F),$$

la fonction limite $L(z, F)$ jouissant des propriétés suivantes:

(9) $$L(z,F) = \begin{cases} e^{G(z)} & \text{pour } z \in D, \\ 1 & \text{pour } z \in C, \end{cases}$$

où $G(z)$ est la fonction de Green du domaine D avec le pôle à l'infini. On a donc $L(z,F) > 1$ dans D et lorsque z tend vers F la fonction $L(z,F)$ tend uniformement vers 1.

J'aurai à m'appuyer dans la suite sur ces deux résultats

3. Désignons par $g_n(y)$ la fonction analytique définie dans le voisinage du point $y=0$ par la formule

(10) $$g_n(y) = \frac{y}{\sqrt[n]{(1-y\eta_{1n})(1-y\eta_{2n})\dots(1-y\eta_{nn})}}, \qquad n=2,3,\dots,$$

où les $\eta_{1n}, \eta_{2n}, \dots, \eta_{nn}$ sont des points extrémaux de F, la détermination du radical étant choisie de manière que le quotient $g_n(y)/y$ soit égal à 1 au point $y=0$. Puisque le polynome

$$(1-y\eta_{1n})(1-y\eta_{2n})\dots(1-y\eta_{nn})$$

ne s'annule pas dans le domaine $\varDelta$ et que $\varDelta$ est simplement connexe la fonction $g_n(y)$ est régulière et uniforme dans $\varDelta$.

[2]) Ann. Soc. Polon. Math., t. 12 (1934), p. 57—71 et t. 18 (1945) p. 1—11.

Théorème I. 1° *La suite* (10) *converge dans le domaine* Δ *vers une fonction* $g(y)$ *holomorphe dans* Δ

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(y) = g(y)$$

la convergence étant uniforme dans le voisinage de chaque point de Δ, 2° *la fonction*

$$(12) \qquad x = d\cdot g(y), \qquad \text{où } d = d(F),$$

effectue la représentation conforme du domaine Δ *sur le cercle* $K\{|x|<1\}$ *et on a* $d\,g(y) \equiv f^{-1}(y)$, *où* $f^{-1}(y)$ *est la fonction inverse de la fonction* (1).

Démonstration 1° Posons

$$P_n(z) = (z-\eta_{1n})(z-\eta_{2n})\dots(z-\eta_{nn})$$

et observons que

$$(13) \qquad |g_n(y)| \equiv 1 : \sqrt[n]{\left|P_n\left(\frac{1}{y}\right)\right|}$$

Étant identiquement

$$|P_n(z)| = |z-\eta_{1n}|\cdot|L_{n-1}(z)|\cdot\Delta_{n-1}$$

il suit de (7) et (8) que

$$(14) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = L(z,F).d(F) \qquad \text{pour } z\in D,$$

donc d'après (13) la suite des modules $\{|g_n(y)|\}$ converge dans le domaine Δ.

Soit Δ_0 un domaine fermé et borné quelconque contenu dans Δ. On peut lui faire correspondre deux nombres positifs M et δ tels que, si $y\in\Delta_0$, on ait

$$|y|\leqslant M \quad \textit{et} \quad |1-y\,\eta_{kn}|>\delta \quad \textit{pour } k=1,2,\dots,n$$

et par suite $|g_n(y)|<M/\delta$ dans Δ_0 pour $n=2,3,\dots$. Il s'ensuit que les fonctions (10) forment une famille normale dans Δ.

Soient $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ deux fonctions limites quelconques de la suite (10). Elles sont holomorphes dans Δ, car la famille (10) est normale, et on a $|\varphi(y)|=|\psi(y)|$, car la suite $\{|g_n(y)|\}$ y est convergente, donc

$$\psi(y) = e^{i\Phi}.\varphi(y)$$

où Φ est une constante réelle. Mais les quotients $\varphi(y)/y$ et $\psi(y)/y$ tendent vers 1 lorsque $y \to 0$, donc $e^{i\Phi}=1$ et les fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ sont identiques. Par suite la limite (11) existe et la fonction $g(y)$ est holomorphe dans Δ.

2° D'après (13) et (14) on a

$$(15) \qquad |g(y)| = \frac{1}{d \cdot L(z,F)}, \qquad \text{où } z = \frac{1}{y},$$

donc

$$d \cdot g(y) < 1 \qquad \text{pour } y \in \Delta$$

car $L(z,F) > 1$ pour $z \in D$. Je dis que chaque valeur x_1 du cercle $|x| < 1$ est prise par la fonction $d \cdot g(y)$ en un et un seul point $y_1 \in \Delta$.

En effet, la valeur $x=0$ est prise au seul point $y=0$, ce qui résulte de la formule (15) car $L(z,F)=\infty$ au seul point $z=\infty$. D'autre part, la fonction $d \cdot |g(y)|$ tend uniformément vers 1 lorsque y tend vers la frontière Γ de Δ car $L(z,F)$ tend uniformément vers 1 lorsque z tend vers la frontière F de D. Par suite il existe dans Δ une courbe simple fermée Γ_1 entourant le point $y=0$ sur laquelle on a

$$d \cdot |g(y)| > |x_1|.$$

D'après le théorème connu de Rouché les fonctions

$$d \cdot g(y) \quad \text{et} \quad d \cdot g(y) - x_1$$

ont le même nombre de zéros à l'intérieur de Γ_1 donc $d \cdot g(y) - x_1$ s'annule en un seule point $y = y_1$ de Δ car $d \cdot g(y)$ s'annule au seul point $y=0$.

Il en résulte que la fonction (12) est univalente dans Δ et réprésente ce domaine sur le cercle $K\{|x|<1\}$ de manière que les points $x=0$ et $y=0$ se corespondent et que la limite

$$\lim_{y \to 0} \frac{x}{y} = d \cdot \lim_{y \to 0} \frac{g(y)}{y} = d$$

est positive. Il n'existe qu'une seule fonction remplissant ces conditions et, comme la fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ de (1) les remplit aussi, on a indentiquement $f^{-1}(y) \equiv d \cdot g(y)$.

4. Considérons les points extrémaux (3) de F, formons pour chaque $p=1, 2, \ldots$ les sommes des puissances $\eta_{1n}^p + \eta_{2n}^p + \ldots + \eta_{nn}^p$ et les moyennes arithmétiques

$$(17)\qquad \begin{aligned} s_{1n} &= \frac{\eta_{1n} + \eta_{2n} + \ldots + \eta_{nn}}{n} \\ s_{2n} &= \frac{\eta_{1n}^2 + \eta_{2n}^2 + \ldots + \eta_{nn}^2}{n} \\ s_{3n} &= \frac{\eta_{1n}^3 + \eta_{2n}^3 + \ldots + \eta_{nn}^3}{n} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Théorème II. *Lorque $n \to \infty$ toutes les moyennes $\{s_{1n}\}$, $\{s_{2n}\}$, $\{s_{3n}\}, \ldots$ tendent vers des limites déterminées*

$$(18)\qquad \lim_{n\to\infty} s_{pn} = s_p, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots$$

D é m o n s t r a t i o n. Calculons le développement de la fonction (10) en la série de Taylor dans le voisinage du point $y=0$. Pour ce but désignons par $\Phi = \Phi_n(y)$ la fonction

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt[n]{(1-y\eta_{1n})(1-y_{2n}\,\eta_{2n})\ldots(1-y\eta_{nn})}} = e^{s_n(y)}$$

où

$$s = s_n(y) = -\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \log(1-y\eta_{kn})\right], \qquad s_n(0)=0.$$

Puisque $g_n(y) = y\cdot\Phi$ et que

$$\begin{aligned} g_n'(y) &= \Phi + y\Phi', & g_n'(0) &= \Phi_n(0) \\ g_n''(y) &= 2\Phi' + y\Phi'', & g_n''(0) &= 2\,\Phi_n'(0) \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ g_n^{(p)}(y) &= p\cdot\Phi^{(p-1)} + y\,\Phi^{(p)}, & g_n^{(p)}(0) &= p\,\Phi_n^{(p-1)}(0) \end{aligned}$$

on a

$$(19)\qquad g_n(y) = y + \frac{\Phi_n'(0)}{1!}y^2 + \frac{\Phi_n''(0)}{2!}y^3 + \ldots + \frac{\Phi_n^{(p-1)}(0)}{(p-1)!}y^p + \ldots$$

et cette série converge dans le plus grand cercle de centre $y=0$ contenu dans le domaine Δ.

Les dérivées de $\Phi = \Phi_n(y)$ s'expriment par les formules suivantes: $\Phi' = s'\Phi$,

$$\Phi'' = (s'' + s'^2)\Phi,$$

$$\Phi''' = (s''' + 3s''s' + s'^3)\Phi,$$

$$\Phi^{(4)} = (s^{(4)} + 4s'''s' + 3s''^2 + 6s''s'^2 + s'^4)\Phi$$

et généralement pour $p = 2, 3, \ldots$

$$\text{(20)} \qquad \Phi^{(p)} = s^{(p)} \cdot \Phi + \binom{p-1}{1} s^{(p-1)} \cdot \Phi' + \binom{p-1}{2} s^{(p-2)} \cdot \Phi'' + \\ + \ldots + \binom{p-1}{p-1} s' \cdot \Phi^{(p-1)}.$$

D'autre part, on a

$$s' = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_{kn}}{1 - y\eta_{kn}}, \qquad s'_n(0) = s_{1n}$$

$$s'' = \frac{1!}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_{kn}^2}{(1 - y\eta_{kn})^2}, \qquad s''_n(0) = 1!\, s_{2n}$$

. . . .

$$s^{(p)} = \frac{(p-1)!}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_{kn}^p}{(1 - y\eta_{kn})^p}, \qquad s_n^{(p)}(0) = (p-1)!\, s_{pn},$$

donc

$$\Phi'_n(0) = s_{1n}$$

$$\Phi''_n(0) = 1!\, s_{2n} + s_{1n}^2$$

$$\Phi'''_n(0) = 2!\, s_{3n} + 3 s_{2n} s_{1n} + s_{1n}^3$$

$$\Phi_n^{(4)}(0) = 3!\, s_{4n} + 8 s_{3n} s_{1n} + 3 s_{2n}^2 + 6 s_{2n} s_{1n}^2 + s_{1n}^4$$

. . . .

$$\Phi_n^{(p)}(0) = (p-1)!\, s_{pn} + p\,(p-2)!\, s_{p-1,n}\, s_{1n} + \ldots + s_{1n}^p$$

et par suite

$$\text{(21)} \quad g_n(y) = y + s_{1n} y^2 + \frac{s_{2n} + s_{1n}^2}{2!} y^3 + \frac{2s_{3n} + 3s_{2n}s_{1n} + s_{1n}^3}{3!} y^4 + \ldots \\ + \frac{(p-1)!\, s_{pn} + R_{pn}}{p!} y^{p+1} + \ldots$$

où R_{pn} est un polynome par rapport aux moyennes s_{1n}, $s_{n2}, \ldots, s_{p-1,n}$.

Observons maintenant que, d'après le théorème I, les fonctions (21) tendent uniformément dans le voisinage du point $y=0$ vers une fonction limite, donc la suite $\{s_{1n}\}$ tend vers une limite s_1; pareillement il existe la limite $\lim_{n\to\infty} (s_{2n} + s_{1n}^2)$ donc la suite $\{s_{2n}\}$ tend vers une limite s_2 et ainsi de suite.

5. Soit $y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots$ le développement de la fonction $g(y)$ dans le voisinage du point $y=0$. La fonction (12) peut donc être représentée par la série

$$x = d \cdot g(y) = d \cdot (y + b_2 y + b_3 y^3 + \ldots) \tag{22}$$

et il suit du théorème II et du développement (21) que les coefficients $b_2, b_3, \ldots$ s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} b_2 &= s_1 \\ b_3 &= \frac{1}{2!}(s_2 + s_1^2) \\ b_4 &= \frac{1}{3!}(2s_3 + 3s_2 s_1 + s_1^3) \\ b_5 &= \frac{1}{4!}(3!\, s_4 + 8s_3 s_1 + 3s_2^2 + 6s_2 s_1^2 + s_1^4) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{23}$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \Phi_n^{(p)}(0) = p!\, b_{p+1}$ on déduit de (20) la formule de reccurence suivante pour $p = 2.\ 3, \ldots$

$$b_{p+1} = \frac{1}{p!}\Big[(p-1)!\, s_p + \binom{p-1}{1} \cdot (p-2)!\, s_{p-1} \cdot b_2 + \ldots + \binom{p-1}{k} \cdot (p-k-1)!\, k!\, s_{p-k} \cdot b_{k+1} + \ldots + \binom{p-1}{p-1} (p-1)!\, s_1 \cdot b_p\Big]. \tag{24}$$

Il en résulte le théorème:

Théorème III. *Les coefficients de la fonction* (22) *et par suite aussi les coefficients* $c_1, c_2, \ldots$ *de la fonction donnée* (1) *ne dépendent que du diamètre transfini de* F *et des limites* $s_1, s_2, \ldots$ *des moyennes* (17) *des points extrèmaux de* F.

Les formules (23) et (24) montrent que le coefficient b_{k+1} de la sèrie (22) ne dépend que de k termes initiales de la suite des moyennes $s_1, s_2, s_3 \ldots$ et que ce coefficient est un polynome par rapport à $s_1, s_2, \ldots s_k$.

Remplaçons dans la série (22) la variable y par la série $c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x_3 + \ldots.$ On aura identiquement dans le cercle $K\{|x|<|\}$

$$\frac{x}{d} = c_1 x + (c_2 + b_2 c_1^2) x^2 + (c_3 + 2b_2 c_1 c_2 + b_3 c_1^3) x^3 + $$
$$+ (c_4 + 2b_2 c_1 c_3 + b_2 c_2^2 + 3b_3 c_1^2 c_2 + b_4 c_1^4) x^4 + \ldots$$

d'où l'on déduit les formules

$$c_1 = \frac{1}{d}, \quad c_2 = -\frac{s_1}{d^2}, \quad c_3 = \frac{3s_1^2 - s_2}{2d^3}, \quad c_4 = -\frac{8s_1^3 - 6s_1 s_2 + s_3}{3d^4}, \ldots.$$

Par suite, si l'on donne à la série (1) la forme

(25) $$y = f(x) = c_1 (x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots),$$

où $a_2 = c_2/c_1$, $a_3 = c_3/c_1, \ldots,$ on aura

(26)
$$c_1 = \frac{1}{d}$$
$$a_2 = -\frac{s_1}{d}$$
$$a_3 = \frac{3s_1^2 - s_2}{2d^2}$$
$$a_4 = -\frac{8\, s_1^3 - 6\, s_1 s_2 + s_3}{3d^3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces formules mettent en évidence la signification géométrique des coefficients d'une fonction univalente dans le cercle. On voit notamment que:

Si la fonction (25) est univalente dans le cercle $|x|<1$, il existe un continu borné F tel que: 1° F constitue la frontière d'un domaine simplement connexe contenant le point $z=\infty$ dans son intérieur et ne contenant pas le point $z=0$, 2° lorsqu'on calcule le diamètre transfini d de F, les points extrémaux (6) de F et les moyennes $s_1, s_2, \ldots,$ on peut exprimer les coefficients $c_1, a_2, a_3, \ldots$ de la série (25) par les formules (26).

Observons que, lorsque d est fixe, le coefficient a_n ne dépend, quel que soit $n=2.\ 3,\ldots,$ que de la position des moyennes $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

D'après la seconde des formules (26) l'innégalité connue de Bieberbach $|a_2| \leqslant 2$ exprime le fait que la moyenne s_1 est contenue dans le cercle

$$|z| \leqslant r, \qquad \text{où } r = 2d.$$

Pareillement, d'après l'inégalité $|a_3| \leqslant 3$ de Löwner, la moyenne s_2 est contenue dans le cercle

$$|z - z_0| \leqslant r, \qquad \text{où } z_0 = 3s_1^2, \quad r = 6d^{12}$$

Inversement, chaque relation entre les moyennes $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ et le diamètre transfini d de l'ensemble F entraîne une relation entre les coefficients $a_2, a_3, \ldots, a_n$ de la fonction univalente (25).

Państwowy Instytut Matematyczny.

SUR LES OBJETS GÉOMÉTRIQUES A UNE COMPOSANTE

par

ST. GOŁĄB (Kraków).

§ 1. Dans le travail publié dans le tome XX[1]) de cet annuaire je me suis posé le problème de déterminer, en faisant les suppositions les plus générales possibles, tous les objets géométriques de première classe à une composante[2]). La méthode générale de mon raisonnement dans le cas $n \geqslant 3$ ne pouvait pas être appliquée au cas particulier de $n = 2$ qui exige un traitement particulier.

Dans mes considérations sur ce cas une erreur de signe se glissa dans le deuxième et le sixième symbole de Poisson (97)[3]). Il s'ensuit que les formules (98) dans ce travail doivent avoir la forme suivante:

$$(1) \quad \begin{cases} (X_1, X_2) f = (X_2, X_4) f = -X_2 f \\ (X_1, X_3) f = (X_3, X_4) f = X_3 f \\ (X_1, X_4) f = 0 \\ (X_2, X_3) f = -X_1 f + X_4 f \end{cases}$$

A cause de cette erreur le raisonnement qui suivait tombe, ce qui eût pour résultat que pour $n = 2$ seulement une certaine partie de la classe entière des objets cherchés a été déterminée.

---

[1]) St. Gołąb. Sur la théorie des objets géométriques. Ann. Soc. Polon. Math. XX (1947), 10—26.

[2]) En ce qui concerne la terminologie, nous renvoyons le lecteur au travail de MM. J. A. Schouten et J. Haantjes, On the theory of the geometric object. Proc. of the Lond. Math. Soc. Vol. 42 (1937). 356—376.

[3]) Les numéros correspondent au travail cité plus haut (l. c.[1])).

En 1946 parut le travail de J. Piencow consacré au même sujet dans lequel l'auteur en appliquant une autre méthode due à Medolaghi-Wagner[5]), basée sur la théorié de groupes des transformations de Lie, détermine entre-autre l'ensemble des objets géométriques de première classe à une composante pour $n=2$. L'auteur ne précise pas exactement ce qu' il entend par deux objets „*semblables*" (nous le faisons dans une note qui va paraître dans le Bulletin de l'Acad. Polon. des Sciences et des Lettres sous le titre „ *Sur la notion de similitude des objets géométriques*"). Il applique d'ailleurs une méthode qui suppose le caractère analytique des fonctions qui y interviennent, une méthode ne pouvant pas exclure d'avance l'existence d'autres solutions, comme p. ex. dans le cas de $n=1$ l'auteur n'a pas pu obtenir (comme E. Cartan[6]) en son temps) les densités au sens de M. Weyl.[7])

Le but de cette Note, qui complète organiquement mon travail mentionné, est de corriger l'erreur dont il a été question au début et de déterminer dans le cas $n=2$ la classe complète des solutions en partant des suppositions formulées antérieurement.

§ 2. Des équations (1) résulte le système suivant des équations ordinaires du premier ordre aux fonctions in connues

(2) $$\omega_{ik}(x)\,. \qquad (i, k=1,2)$$

(3) $$\begin{cases} \omega_{11}\,\omega'_{12}-\omega_{12}\,\omega'_{11}=-\,\omega_{12} \\ \omega_{11}\,\omega'_{21}-\omega_{21}\,\omega'_{11}=\omega_{21} \\ \omega_{11}\,\omega'_{22}-\omega_{22}\,\omega'_{11}=0 \\ \omega_{12}\,\omega'_{21}-\omega_{21}\,\omega'_{12}=\omega_{22}-\omega_{11} \\ \omega_{12}\,\omega'_{22}-\omega_{22}\,\omega'_{12}=-\,\omega_{12} \\ \omega_{21}\,\omega'_{22}-\omega_{22}\,\omega'_{21}=\omega_{21} \end{cases}$$

---

[4]) J. Piencow, Classification des objets géometriques différentiels à une compo ante de classe v (en russe). Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R. 54 (1946), No 7, 56 —570.

[5]) V. Wagner, Dokl. Akad, Nauk S. S. S. R (1945); P. Medolaghi, Annali di Matematica (1897).

[6]) E Cartan, Sur la structure des groupes infinis des transformations. Ann. Ecole Norm. Sup. 21 (1904), 153—206 et 22 (1905), 219—308

[7]) La densité au sens de M. Weyl c'est un objet à une composante. dont la loi de transformation est la suivante: $\bar{x}=x\cdot|\Delta|^m$.

La quatrième des équations (3) conduit à la conclusion

(4) $\omega_{22} = a \cdot \omega_{11}$, où a est une constante.

En tenant compte de cela, nous obtenons de la cinqième et de la sixième de ces équations

$$a(\omega_{12}\,\omega'_{11} - \omega_{11}\,\omega'_{12}) = -\omega_{12}$$
$$a(\omega_{21}\,\omega'_{11} - \omega_{11}\,\omega'_{21}) = \omega_{21}$$

ce qui, confronté avec la première et la deuxième équation, nous conduit à ce que

(5) $$\begin{cases} \omega_{12}(a+1) = 0 \\ \omega_{21}(a+1) = 0 . \end{cases}$$

Les équations (5) nous donnent l'alternative

(6) $$\omega_{12} \equiv \omega_{21} \equiv 0$$

ou bien

(7) $$a = -1 .$$

L'éventualité (6) avec la quatrième des équations (3) donne $\omega_{22} = \omega_{11}$, d'où nous obtenons les formules (114) de mon travail, ce qui conduit aux objets géométriques du type Δ.

Il reste à considérer le cas (7). Dans ce cas la première, la deuxième et la quatrième équation (la troisième, la cinqième et la sixième ont été déjà utilisées) donnent le système:

(8) $$\begin{cases} \omega_{11}\,\omega'_{12} - \omega_{12}\,\omega'_{11} = -\omega_{12} \\ \omega_{11}\,\omega'_{21} - \omega_{21}\,\omega'_{11} = \omega_{21} \\ \omega_{12}\,\omega'_{21} - \omega_{21}\,\omega'_{12} = -2\,\omega_{11} \end{cases}$$

ou, en changeant les notations pour éviter dans la suite les grandeurs à deux indices:

(9) $$\begin{cases} \lambda = \omega_{11} \\ \mu = \omega_{12} \\ \nu = \omega_{21} \end{cases},$$

le système suivant:

(10) $$\begin{cases} \lambda\,\mu' - \mu\,\lambda' = -\mu \\ \lambda\,\nu' - \nu\,\lambda' = \nu \\ \mu\,\nu' - \nu\,\mu' = -2\lambda \end{cases}$$

Le système (10) ne peut pas être résolu par rapport aux dérivées λ', μ', ν' des fonctions cherchées puisque le déterminant des coefficients est identiquement égal à zéro. Il en résulte que les solutions de ce système (si l'on interprète λ, μ, ν comme les coordonnées des points dans l'espace à trois dimensions) ne remplissent pas l'espace tout entier, mais sont situées sur une certaine surface (de deuxième degré) que nous allons déterminer.

Multiplions, notamment, la première des équations (10) par ν, la deuxième par μ et soustrayons ces équations membre à membre. Nous obtiendrons:

$$\lambda(\mu\nu' - \nu\mu') = 2\mu\nu \tag{11}$$

et, en tenant compte de la troisième des équations (10),

$$-\lambda^2 = \mu\nu. \tag{12}$$

J'affirme qu'aucune des fonctions λ, μ, ν ne peut être identiquement nulle. En effet, si par exemple $\mu \equiv 0$, on aurait aussi $\lambda \equiv 0$ et la deuxième des équations (10) donnerait $\nu \equiv 0$, c'est-à-dire que toutes les fonctions ω_{ik} seraient identiquement égales à zéro contrairement à la supposition (32). L'équation (12) permet d'éliminer la fonction $\nu(x)$ et de réduire le système (10) au système de deux équations à deux fonctions inconnues λ, μ qui se réduit dans la suite (à cause de la dépendance linéaire de deux équations) à une équation à deux fonctions inconnues λ, μ:

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = -\mu. \tag{13}$$

Si l'on traite dans l'équation (13) $\mu(x)$ comme une fonction donnée arbitrairement et $\lambda(x)$ comme fonction cherchée, nous obtenons l'équation linéaire (non homogène):

$$\lambda' = \frac{\mu'}{\mu}\lambda + 1, \tag{14}$$

dont l'intégrale générale a la forme:

$$\lambda(x) = C\mu(x) + \mu(x)\int\frac{dx}{\mu(x)}, \tag{15}$$

C étant une constante arbitraire.

L'ensemble de toutes les solutions qui dépend d'une fonction arbitraire $\mu(x)$ et d'une constante arbitraire C est donné par les formules:

$$(16)\quad \begin{cases} \lambda = C\mu(x) + \mu(x)\int \dfrac{dx}{\mu(x)}, \\ \mu = \mu(x), \\ \nu = -\dfrac{\left[C\cdot\mu(x) + \mu(x)\int \dfrac{dx}{\mu(x)}\right]^2}{\mu(x)}. \end{cases}$$

Les formules (16) sont valables dans chaque intervalle ouvert, dans lequel la fonction $\mu(x)$ n'est pas égale à zéro.

Après la détermination de λ, μ, ν on a maintenant:

$$(17)\quad \omega_{11} = \lambda(x), \quad \omega_{12} = \mu(x), \quad \omega_{21} = \nu(x), \quad \omega_{22} = -\lambda(x).$$

La substitution de ces valeurs dans le système (95) conduit, en désignant pour plus de commodité,:

$$(18)\quad \begin{cases} \beta_{11} = \beta_1, \quad \beta_{12} = \beta_2, \quad \beta_{21} = \beta_3, \quad \beta_{22} = \beta_4, \\ \Delta = \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3, \\ f_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad f_i = \dfrac{\partial f}{\partial \beta_i}, \end{cases}$$

au système:

$$\begin{cases} f_1 - \dfrac{f_0}{\Delta}(\beta_4\lambda - \beta_3\nu) = 0 \\ f_2 - \dfrac{f_0}{\Delta}(\beta_4\mu + \beta_3\lambda) = 0 \\ f_3 - \dfrac{f_0}{\Delta}(\beta_1\nu - \beta_2\lambda) = 0 \\ f_4 - \dfrac{f_0}{\Delta}(-\beta_1\lambda - \beta_2\mu) = 0. \end{cases}$$

Ce système, en éliminant le coefficient ν tiré de l'équation (12), prendra la forme:

$$(19)\quad \begin{cases} f_1 - \dfrac{f_0}{\Delta}\left(\beta_4\lambda + \beta_3\dfrac{\lambda^2}{\mu}\right) = 0 \\ f_2 - \dfrac{f_0}{\Delta}(\beta_4\mu + \beta_3\lambda) = 0 \\ f_3 + \dfrac{f_0}{\Delta}\left(\beta_1\dfrac{\lambda^2}{\mu} + \beta_2\lambda\right) = 0 \\ f_4 + \dfrac{f_0}{\Delta}(\beta_1\lambda + \beta_2\mu) = 0 \end{cases}$$

Le système (19) est un système complet de Jacobi (on le vérifie sans difficulté), il possède donc des solutions non triviales (non constantes). Nous laissons de côté les détails de l'intégration du système (19). Remarquons seulement que nous devons nous souvenir de ce que λ et μ ne sont pas indépendants à cause de la relation (14.)

Après avoir intégré le système (19), nous trouvons l'intégrale particulière

$$f = \frac{\beta_1 \lambda(x) + \beta_2 \mu(x)}{\beta_3 \lambda(x) + \beta_4 \mu(x)}. \tag{20}$$

En vertu de la théorie générale, l'intégrale générale sera

$$f = \varphi\left(\frac{\beta_1 \lambda(x) + \beta_2 \mu(x)}{\beta_3 \lambda(x) + \beta_4 \mu(x)}\right), \tag{21}$$

où $\varphi(u)$ désigne une fonction arbitraire de la classe C_1.

Il faut maintenant revenir du système (19) à l'équation fonctionnelle des objets géométriques, c'est-à-dire à l'équation:

$$\begin{aligned} &f\{f(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\} \equiv \\ &\equiv f[x, \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_3, \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_4, \beta_3 \alpha_1 + \beta_4 \alpha_3, \beta_3 \alpha_2 + \beta_4 \alpha_4]. \end{aligned} \tag{22}$$

On sait seulement que, dans nos hypothèses, toute solution de l'équation (22) doit vérifier le système (19) et que le réciproque n'est pas nécessairement vrai. Remarquons d'abord à ce sujet que la fonction f doit remplir la condition supplémentaire, à savoir

$$f(x, 1, 0, 0, 1) \equiv x. \tag{23}$$

Si nous tenons compte dans (21) de la relation (23), nous obtenons la condition:

$$\varphi\left[\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}\right] \equiv x. \tag{24}$$

Les équations (24) et (14) donnent:

$$\varphi'\left[\frac{\lambda(x)}{\mu(x)}\right] \equiv \mu(x), \tag{25}$$

ce qui montre ($\mu \neq 0$) que la fonction φ est reversible et qu' elle est, notamment, la fonction inverse de la fonction $\Phi(x)$ déterminée par la relation:

$$(26) \qquad \Phi(x) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}.$$

La fonction φ est donc déterminée univoquement à l'aide des fonctions λ et μ, c'est-à-dire à l'aide de la fonction $\mu(x)$ et de la constante C.

Le fait que la fonction $\mu(x)$ dans la formule (21) es arbitraire suggère l'idée que la foction $\Phi(x)$ définie au moyen de la formule (26) peut être choisie d'une façon arbitraire. Examinons cette hypothèse. Remarquons que la fonction f définie par la formule (21) peut être, à cause de (26), exprimée de la façon suivante:

$$(27) \qquad f = \varphi \left\{ \frac{\beta_1 \Phi(x) + \beta_2}{\beta_3 \Phi(x) + \beta_4} \right\}.$$

Les paramètres β_1, β_2, β_3, β_4 étant arbitraires, on conclut que la fonction $\varphi(u)$ doit avoir le domaine d'existence non borné. La question se pose si la fonction φ peut avoir des points où elle n'est pas définie. Or, s'il existe un seul et unique point u_0 d' indétermination, alors il est possible de construire une fonction $\varphi(u)$ possédant au point u_0 une discontinuité (ne pouvant pas être supprimée) et reversible en même temps dans tout le domaine d'existence. Par contre, il est impossible de construire une telle fonction φ possédant au moins deux points d'indétermination. Par conséquent, le domaine d'existence de la fonction φ est identique avec l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ tout entier ou bien avec l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ privé d'un point u_0. Le réciproque est aussi vrai. Nous pouvons énoncer notamment e suivant

Théorème. *$\Phi(x)$ étant une fonction arbitraire, continue et reversible, définie dans un ensemble ouvert E se composant d'un seul intervalle (fini ou infini) ou bien de deux intervalles contigus, si l'ensemble des valeurs de la fonction Φ est l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ ou bien*

l'ntervalle ($-\infty$, $+\infty$) *privé d'un seul point, si* $\varphi(u)$ *est la fonction inverse à la fonction* $\Phi(x)$, *alors la fonction* f, *définie par la formule* (27) *satisfait à l'équation* (22) *et à la condition* (23).

La démonstration est simple. En substituant (27) dans (22) nous obtenons:

$$\varphi\left\{\frac{\beta_1 \Phi\left[\varphi\left(\frac{\alpha_1\Phi(x)+\alpha_2}{\alpha_3\Phi(x)+\alpha_4}\right)\right]+\beta_2}{\beta_3 \Phi\left[\varphi\left(\frac{\alpha_1\Phi(x)+\alpha_2}{\alpha_3\Phi(x)+\alpha_4}\right)\right]+\beta_4}\right\}=\varphi\left\{\frac{(\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_3)\Phi(x)+\beta_1\alpha_2+\beta_2\alpha_4}{(\beta_3\alpha_1+\beta_4\alpha_3)\Phi(x)+\beta_3\alpha_2+\beta_4\alpha_4}\right\}.$$

Puisque la fonction φ est reversible et que $\Phi[\varphi(u)]\equiv u$, la dernière équation est équivalente à la suivante

$$\frac{\beta_1\,\dfrac{\alpha_1\,\Phi(x)+\alpha_2}{\alpha_3\,\Phi(x)+\alpha_4}+\beta_2}{\beta_3\,\dfrac{\alpha_1\,\Phi(x)+\alpha_2}{\alpha_3\,\Phi(x)+\alpha_4}+\beta_4}\equiv\frac{(\beta_1\,\alpha_1+\beta_2\,\alpha_3)\,\Phi(x)+\beta_1\,\alpha_2+\beta_2\,\alpha_4}{(\beta_3\,\alpha_1+\beta_4\,\alpha_3)\,\Phi(x)+\beta_3\,\alpha_2+\beta_4\,\alpha_4}$$

qui est une identité presque évidente.

Par là même notre proposition est démontrée et dans le cas (7) tous les objets sont ainsi déterminés.

Remarquons que pour les objets obéissant à la loi de transformation (27) il existe les systèmes de coordonnées dans lesquels l'objet ne possède pas de composante. Appellons tels systèmes „exceptionnels". x_0 étant la composante de l'objet dans un système non exceptionnel, prenons une transformation (donnée à l'aide des paramètres β_1, β_2, β_3, β_4) telle qu'on ait $\beta_3\,\Phi(x_0)+\beta_4=0$. Alors cette transformation conduit à un système exceptionnel. Un cas analogue se présentera si la fonction $\varphi(u)$ possède un point d'indétermination u_0 et si les paramètres β_i définissant la transformation remplissent l'équation:

$$\frac{\beta_1\,\Phi(x_0)+\beta_2}{\beta_3\,\Phi(x_0)+\beta_4}=u_0\,.$$

L'ensemble des transformations qui conduisent d'un système exceptionnel quelconque à un autre système exceptionnel forment un sous-groupe du groupe général donné.

§ 3. Considérons maintenant deux cas particuliers. I. Posons $\mu(x) = -x^2$, $C = 0$. On a alors

$$\lambda(x) = -x\,, \quad \Phi(x) = \frac{1}{x}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{u}$$

et

$$(28) \quad f = \frac{-x\beta_3 - x^2\beta_4}{-x\beta_1 - x^2\beta_2} = \frac{\beta_3 + \beta_4 \cdot x}{\beta_1 + \beta_2 \cdot x} \qquad (x \neq 0)\,.$$

Etant donné un vecteur contrevariant arbitraire v^i, si l'on pose

$$(29) \qquad x = \frac{v^2}{v^1}\,,$$

nous obtiendrons précisément l'objet géométrique qui se transforme d'après la règle (28).

II. Posons $\mu(x) \equiv -1$, $C = 0$.

On obtient dans ce cas

$$\lambda(x) = x\,, \; \Phi(x) = -x\,, \; \varphi(u) = -u$$

et par conséquent

$$(30) \qquad f = -\frac{x\beta_1 - \beta_2}{x\beta_3 - \beta_4} = \frac{\beta_2 - \beta_1 x}{\beta_3 x - \beta_4}\,.$$

Etant donné un vecteur covariant arbitraire w_i, si l'on pose

$$(31) \qquad x = \frac{w_2}{w_1}\,,$$

nous obtiendrons précisément l'objet géométrique dont la composante x se transforme d'après la règle de transformation (30).

§ 4. Le fait que parmi les objets trouvés sont les quotients des composantes du vecteur nous suggère le problème suivant : soit un vecteur arbitraire, p. ex. un vecteur-densité contrevariant donc un objet à deux indices $\mathfrak{v}^k$ pour lequel la règle de transformation est :

$$(32) \quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{v}}^1 = \Delta^m(\beta_1\mathfrak{v}^1 + \beta_1\mathfrak{v}^2) \\ \bar{\mathfrak{v}}^2 = \Delta^m(\beta_3\mathfrak{v}^1 + \beta_4\mathfrak{v}^2) \end{cases} \qquad \Delta = \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3 \neq 0\,.$$

Demandons nous quelle doit être la fonction

$$(33) \qquad F(\xi,\eta)\ ,$$

pour que

$$(34) \qquad \omega = F(\mathfrak{v}^1,\mathfrak{v}^2)$$

soit un objet géométrique de première classe à une composante.

Si l'on suppose que ω soit un objet du type $\varDelta$, on arrive très vite à la contradiction. En effet, cette supposition conduit à la relation

$$(35) \quad F\{\varDelta^m(\beta_1\xi+\beta_2\eta),\ \varDelta^m(\beta_3\xi+\beta_4\eta)\} = \psi\{\varDelta\cdot\Psi[F(\xi,\eta)]\},$$

où ψ est une certaine fonction reversible de classe C_1 et Ψ la fonction inverse de ψ. En posant dans cette relation $\varDelta=1$, on obtient

$$(36) \qquad F(\beta_1\xi+\beta_2\eta,\ \beta_3\xi+\beta_4\eta) = F(\xi,\eta)$$

et de là on arrive facilement à une seule condition restreignante $\beta_1\beta_4-\beta_2\beta_3=1$ pour les variables β_i, et à la conclusion que $F(\xi,\eta)$ doit être une fonction constante. On obtiendrait donc un scalaire, c'est à dire l'objet géométrique de la classe 0 et non de la classe 1.

Supposons maintenant que ω, déterminé par la formule (34) soit un objet de second type, notamment

$$\overline{\omega} = F(\overline{\mathfrak{v}}^1,\overline{\mathfrak{v}}^2) = \varphi\left\{\frac{\beta_1\Phi\,\omega+\beta_2}{\beta_3\Phi\,\omega+\beta_4}\right\},$$

c'est-à-dire

$$(37) \quad F\{\varDelta^m(\beta_1\xi+\beta_2\eta),\ \varDelta^m(\beta_3\xi+\beta_4\eta)\} = \varphi\left\{\frac{\beta_1\Phi[F(\xi,\eta)]+\beta_2}{\beta_3\Phi[F(\xi,\eta)]+\beta_4}\right\}$$

Posons en particulier $\varDelta=1$ dans l'équation (37). Nous obtiendrons:

$$F(\beta_1\xi+\beta_2\eta,\ \beta_3\xi+\beta_4\eta) = \varphi\left\{\frac{\beta_1\Phi[F(\xi,\eta)]+\beta_2}{\beta_3\Phi[F(\xi,\eta)]+\beta_4}\right\}$$

ou, plus exactement,

$$(38) \quad F\left(\beta_1\xi+\beta_2\eta,\ \beta_3\xi+\frac{1+\beta_2\beta_3}{\beta_1}\eta\right) = \varphi\left\{\frac{\beta_1\Phi[F(\xi,\eta)]+\beta_2}{\beta_3\Phi[F(\xi,\eta)]+\frac{1+\beta_2\beta_3}{\beta^1}}\right\}$$

Différentions les deux membres de la relation (38) par rapport à β_1 et substituons, aprés la différentiation, $\beta_1=1$, $\beta_2=\beta_3=0$. Nous obtiendrons:

$$(39) \qquad \xi\, F_1(\xi,\eta)-\eta\, F_2(\xi,\eta)=\varphi'(F(\xi,\eta))\cdot 2\cdot \Phi[F(\xi,\eta)].$$

En différentiant (38) par raport à β_2, on aura après la substitution $\beta_1=1$, $\beta_2=\beta_3=0$:

$$(40) \qquad \eta F_1(\xi,\eta)=\varphi'[F(\xi,\eta)].$$

La différentiation par raport à β_3 et la substitution $\beta_1=1$, $\beta_2=\beta_3=0$ donne pareillement:

$$(41) \qquad \xi F_2(\xi,\eta)=-\varphi'[F(\xi,\eta)]\cdot \Phi^2[F(\xi,\eta)].$$

En éliminant les dérivées partielles F_1 et F_2 des équations (40) et (41), on aura après la substitution dans l'équation (39):

$$\frac{\xi}{\eta}\varphi'+\frac{\eta}{\xi}\varphi'\cdot\Phi^2\equiv 2\cdot\varphi'\cdot\Phi,$$

d'où en simplifiant par $\varphi'[F(\xi,\eta)]\neq 0$, on obtient:

$$(42) \qquad \frac{\xi}{\eta}+\frac{\eta}{\xi}\Phi^2[F(\xi,\eta)]=2\Phi[F(\xi,\eta)].$$

Il s'ensuit

$$(43) \qquad \Phi[F(\xi,\eta)]=\frac{\xi}{\eta}$$

ou encore

$$(44) \qquad F(\xi,\eta)=\varphi\left(\frac{\xi}{\eta}\right).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que si φ désigne une fonction reversible arbitraire d'une variable indépendante, dans ce cas la fonction $F(\xi,\eta)$ déterminée par l'équation (44) remplira l'équation (37). Ainsi donc nous sommes arrivé au résultat suivant: *les seules fonctions des composantes du vecteur ordinaire* ($m=0$) *ou du vecteur-densité* ($m\neq 0$) *qui constituent l'objet géométrique de première classe, sont des fonctions homogènes* (*d'ordre* 0) *de ces composantes.*

Un résultat analogue peut être obtenu pour les vecteurs covariants.

REMARQUE SUR LE DIAMÈTRE TRANSFINI DES ENSEMBLES PLANS

Par

JERZY GÓRSKI (Kraków).

Soit E un ensemble infini fermé et borné de points du plan, $z_0, z_1, \ldots, z_n$ un système de $n+1$ points de E, V_n la borne supérieure de produit

$$V(z_0, \ldots, z_n) = \prod_{0 \leqslant i < k \leqslant n} |z_i - z_k|$$

lorsque, n étant fixe, les z_i varient dans E et soit

(1) $$\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$$

un système de points de E pour lequel $V(\eta_0, \ldots, \eta_n) = V_n$. Supposons encore que les indices des points (1) soient choisis de manière que, si l'on pose

$$\Delta_n^{(i)} = |\eta_i - \eta_0| \ldots |\eta_i - \eta_{i-1}|\, |\eta_i - \eta_{i+1}| \ldots |\eta_i - \eta_n|$$

pour $i = 0, 1, \ldots, n$, on ait

$$\Delta_n^{(0)} \leqslant \Delta_n^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \Delta_n^{(n)} .$$

Le système (1) sera dit n-ième système extrémal de l'ensemble E. On sait[1]) que les suites

$$\left\{ \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \sqrt[n(n+1)]{\Delta_n^{(0)} \Delta_n^{(1)} \ldots \Delta_n^{(n)}} \right\}$$

tendent vers le diamètre transfini de E. Ce diamètre sera désigné par $d(E)$.

---

[1]) F. Leja, Ann. de la Soc. Polon. de Math. t. XVIII (1945), p. 5.

M. F. Leja a posé le probleme suivant[2]): Quel doit être l'ensemble E pour que la suite $\left\{\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}}\right\}$ tende vers la même limite $d(E)$ que la suite $\left\{\sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}}\right\}$?

Ja vais démontrer que:

Lorsque l'ensemble E est une somme des continus, on a

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}}=d(E).$$

Au contraire, lorsque E contient des points isolés, on peut avoir

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}}>d(E).$$

Démonstration: 1°. Supposons d'abord que E soit une somme de continus donc[3]) $d(E)>0$. L'ensemble complémentaire CE à l'ensemble E est une somme finie ou dénombrable des domaines

$$CE=D_\infty+D_1+D_2+\ldots$$

dont un, que je désigne par D_∞, contient le point à l'infini (la somme $D_1+D_2+\ldots$ pouvant être vide). Soit F la frontière de D_∞. D'après le principe de maximum les points $\eta_0,\ldots,\eta_n$ sont situés sur F et on a $d(F)=d(E)$. Il est clair que $F\subset E$.

Soit z un point quelconque de D_∞. M. F. Leja a démontré[4]) qu'il existe la limite $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z-\eta_1|\ldots|z-\eta_n|}$ et qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z-\eta_1|\ldots|z-\eta_n|}=d(E)\,e^{G(z)},$$

où $G(z)$ est la fonction de Green du domaine D_∞ avec le pôle $z=\infty$. Par suite il existe aussi la limite

(2) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z-\eta_0|\ldots||z-\eta_{n-1}|}=d(E)\,e^{G(z)} \quad \text{pour } z\in D_\infty.$$

---

[2]) F. Leja, ibid. t. XX (1947), p. 422.

[3]) Ibid., t. XII (1933), p. 57 — 71; voir p. 60. Le continu = l'ensemble borné, fermé, connexe, contenant plus d'un point.

[4]) Ibid., t. XII, p. 68.

Désignons par E_r la somme de tous les cercles $|z-\zeta|\leqslant r$ lorsque ζ parcourt E, par $(D_\infty)_r$ celui des domaines complémentaires à E_r qui contient le point $z=\infty$ et par F_r la frontière de $(D_\infty)_r$. Posons $B_r = C(D_\infty)_r$ et désignons encore par $\delta(z,F)$ la distance du point z à la frontière F.

Puisque F est une somme de continus la fonction $G(z)$ tend uniformément vers 0 lorsque z (appartenant à D_∞) tend vers F, c'est-a-dire, à chaque $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un nombre $r(\varepsilon)$ tel qu'on ait

(3) $$e^{G(z)}<1+\epsilon \quad \text{pour } z\in D_\infty \text{ et } \delta(z,F)\leqslant r(\varepsilon).$$

Observons maintenant que la convergence (2) est uniforme dans chaque ensemble borné et fermé situé dans D_∞[1]), donc la convergence (2) est uniforme sur la fronitère $F_{r(\varepsilon)}$. Par suite à chaque $\eta>0$ on peut faire correspondre un nombre $N(\eta,F_{r(\varepsilon)})$ tel qu'on ait

(4) $$\sqrt[n]{|z-\eta_0|\ldots|z-\eta_{n-1}|}<d(E)\,e^{G(z)}+\eta$$

pour $z\in F_{r(\varepsilon)}$ et $n>N(\eta,F_{r(\varepsilon)})$.

Il suit de (3) et (4) l'inégalité

$$\sqrt[n]{|z-\eta_0|\ldots|z-\eta_{n-1}|}<d(E)\,[1+\varepsilon]+\eta$$

pour $z\in F_{r(\varepsilon)}$ et $n>N(\eta,F_{r(\varepsilon)})$

donc

$$\sqrt[n]{\max_{z\in F_{r(\varepsilon)}}|z-\eta_0|\ldots|z-\eta_{n-1}|}<d(E)[1+\epsilon]+\eta$$

pour $n>N(\eta,F_{r(\varepsilon)})$ et par suite

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\max_{z\in F_{r(\varepsilon)}}|z-\eta_0|\ldots|z-\eta_{n-1}|}\leqslant d(E)\,[1+e]+\eta.$$

Comme $\eta>0$ est arbitrairement petit, on a

(5) $$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\max_{z\in F_{r(\varepsilon)}}|z-\eta_0|\ldots|z-\eta_{n-1}|}\leqslant[1+\varepsilon]d(E).$$

---

[1]) Ibid., t. XII. p. 68.

D'autre part, on sait que[2])

$$\Delta_n^{(n)} = \max_{z \in E} |z - \eta_0| \ldots |z - \eta_{n-1}| .$$

Puisque $E \subset E_{r(\varepsilon)} \subset B_{r(\varepsilon)}$ et que $F_{r(\varepsilon)}$ est la frontière de $B_{r(\varepsilon)}$, on a d'après le principe de maximum

$$\Delta_n^{(n)} \leqslant \max_{z \in E_{r(\varepsilon)}} |z - \eta_0| \ldots |z - \eta_{n-1}| \leqslant \max_{z \in B_{r(\varepsilon)}} |z - \eta_0| \ldots |z - \eta_{n-1}| =$$
$$= \max_{z \in F_{r(\varepsilon)}} |z - \eta_0| \ldots |z - \eta_{n-1}|$$

et par suite

$$\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} \leqslant \sqrt[n]{\max_{z \in F_{r(\varepsilon)}} |z - \eta_0| \ldots |z - \eta_{n-1}|}.$$

Il en résulte d'aprés (5) que

$$(6) \quad \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} \leqslant \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\max_{z \in F_{r(\varepsilon)}} |z - \eta_0| \ldots |z - \eta_{n-1}|} \leqslant$$
$$\leqslant d(E)\,[1 + \epsilon]$$

et comme $\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} \geqslant \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}}$ et $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}} = d(E)$ on a

$$(7) \qquad \liminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} \geqslant d(E) .$$

Des inégalités (6) et (7) résulte immédiatement la formule

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} = d(E),$$

car ϵ est arbitrairement petit.

2. Supposons maintenat que l'ensemble E soit composé du segment $0 \leqslant z \leqslant 1$ et du point $z = 3$ et soit $\eta_0, \ldots, \eta_n$ le n-ième système extrémal de points de l'ensemble E. Le point $z = 3$ appartient quel que soit $n = 1, 2, \ldots$ à ce système. En effet, si l'on avait $0 \leqslant \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_n \leqslant 1$ on aurait

$$|\eta_0 - \eta_n| \ldots \eta_{n-1} - \eta_n| < |\eta_0 - \eta_n'| \ldots |\eta_{n-1} - \eta_n'|$$

où $\eta_n' = 3$, donc étant

$$V(\eta_0, \ldots, \eta_n) = \Delta_n^{(n)} \cdot V(\eta_0, \ldots, \eta_{n-1}),$$

on aurait

---

[2]) Ibid., t. XII, p. 64.

$$V(\eta_0, \dots, \eta_n) < V(\eta_0, \dots, \eta'_n) \leqslant V_n$$

ce qui est incompatible avec l'égalité $V_n = V(\eta_0, \dots, \eta_n)$.

On sait[1]) que le diamètre transfini de notre ensemble E est égal à $\frac{1}{4}$. D'autre part, on a

$$\Delta_n^{(n)} \geqslant |\eta_0 - \eta'_n| \dots |\eta_{n-1} - \eta'_n| > 2^n$$

donc $\sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} > 2$ et par suite

$$\liminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(n)}} \geqslant 2 > \frac{1}{4} = d(E).$$

Państwowy Instytut Matematyczny.

---

[1]) M. Fekete, Math. Zeitschr. t. 32 (1930), p. 109.
G. Szegö. Math. Zeitschr. t. 9 (1921), p. 254.

SUR L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA DIFFUSION

Par

M. KRZYŻAŃSKI (Kraków).

1. Considérons l'équation *normale* aux dérivées partielles du *type parabolique*

$$(1) \qquad \mathcal{F}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} - b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - c(x,y)\,u = 0$$

dont les coefficients a, b, et c sont continus dans une région illimitée Γ: $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant y \leqslant h$, le coefficient b y satisfaisant à la condition $b(x,y) > \beta > 0$, β étant une constante.

Lorsqu'on pose $a(x,y) = \frac{B}{2D} f(x)$, $b(x,y) = \frac{1}{D}$, $c(x,y) = = \frac{B}{2D} f'(x)$, $y = t$, $f(x)$ étant une fonction admettant la dérivée $f'(x)$ continue, $B > 0$ et $D > 0$ — deux constantes, on obtient l'équation de *la diffusion sous l'action d'une force extérieure*[1] $f(x)$, à savoir

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{B}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\,[f(x)\cdot u]\,.$$

Ceci met en évidence la relation entre l'équation (1) et la théorie analytique de la diffusion,

2. On appelle I[er] problème aux limites pour l'équation (1) relatif à un domaine rectangulaire R: $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$

---

[1]) Voir p. ex. M. Smoluchowski. Über Brown'sche Molekularbewegung. Annalen der Physik. Bd 48 (1915) p. 1103—1112. P. Frank und R. Mises. Die Differential- und Integralgl. der Mechanik und Physik, New-Jork 1943, Bd. II, p. 593.

un problème qui consiste en la recherche d'une solution de l'équation (1) régulière[2)] dans R et se réduisant aux fonctions continues donées sur les côtés de ce rectangle, exepté celui situé sur la caractéristique $y=y_2$. On dit que le rectangle R est régulier par rapport au I[er] problème aux limites pour l'équation (1), lorsque ce problème est toujours résoluble univoquement quels que soient les conditions aux limites (continues).

Pour qu'il en soit ainsi, il suffit, en particulier, que les coefficients de (1) soient lipschitziens, $b\equiv 1$ et que a admette la dérivée a'_x bornée[3)]. On peut ramener l'équation (1) au cas $b\equiv 1$ par un changement des variables indépendantes (voir le travail cité de M. Gevrey, p. 371); lorsque $b(x,y)$ est de classe $C^{(2)}$ (voir note[1)]) le coefficient a dans l'équation transformée admet encore la dérivée a'_x bornée.

J'ai démontré[4)] que si les coefficients de (1) sont bornés et si, en outre, $b(x,y)>\beta>0$, β étant une constante, alors la seule solution de (1), régulière dans Γ (c'est-à-dire continue dans Γ et de classe $C^{(2)}$ à l'intérieur de Γ), appartenant à la classe E_2 de fonctions $u(x,y)$, tels que $|u(x,y)|<Me^{k_0x^2}$ (M et k_0 étant deux constantes positives), s'annulant pour $y=0$ est $u(x,y)\equiv 0$.

Si, en outre, la fonction continue $\varphi(x)$ appartient à la classe E_2 et la hauteur de Γ est assez petite, alors la suite $\{u_n\}$ de solutions de l'équation (1), régulières dans les rectangles R_n: $-n\leqslant x\leqslant n$, $0\leqslant y\leqslant h$ et satisfaisant aux conditions: $u_n(x,0)=\varphi(x)$, $u_n(\pm n,y)=\varphi(\pm n)$ converge dans Γ vers une solution $u(x,y)$ de (1), régulière dans Γ et satisfaisant à la condition initiale $u(x,0)=\varphi(x)$.

[2)] C'est-à-dire continue dans R et de classe $C^{(2)}$ (admettant les dérivées du 2[me] ordre continues) à l'intérieur de R.

[3)] Voir M. Gevrey. Sur l'équation aux dérivées partielles du type parabolique. Journal de Math. pures et appliquées, ser 6, vol. 9 (1913), p. 305—471, en particulier, p. 380.

[4)] M. Krzyżański. Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique, déterminées par les conditions initiales. Ann. de la Soc. Polon. Math. t, 18 (1945), p. 145—156. Note complémentaire, t. 20 (1947).

Dans le présent travail je passe aux *solutions* de l'équation (1), *discontinues* sur la caractéristique $y=0$. Des telles solutions admettent une interprétation évidente dans la théorie de la diffusion et des processus stochastiques.

Je démontrerai d'abord certains théorèmes généraux pour en déduire ensuite des critères particuliers d'unicité et d'existence de telles solutions.

3. Soit E un ensemble fermé, situé sur la caractéristique $y=0$; désignons par CE son complémentaire (par rapport à cette caractéristique). On dira qu'une fonction $u(x,y)$ est une solution de l'équation (1) régulière dans $\Gamma-E$, lorsqu'elle y est continue, elle est de classe $C^{(2)}$ à l'intérieur de Γ et y satisfait à l'équation (1).

Théorème I. *On suppose que $u(x,y)$ est une solution de l'équation* (1) *régulière dans $\Gamma-E$, 2^0 on a $u(x,0)=0$ sur CE, 3^0 il existe une fonction $K(x,y)$ continue et positive dans $\Gamma-E$, de classe $C^{(2)}$ à l'intérieur de Γ et telle que l'on y a $\mathcal{F}(K)\leqslant 0$, 4^0 on a $\lim\, u(x,y):K(x,y)=0$ lorsque le point $P(x,y)\to P_0(x_0,0)\in E$ et lorsque $|x|\to\infty$; alors $u(x,y)\equiv 0$ dans $\Gamma-E$.*

Démonstration. Posons

$$v(x,y)=\begin{cases}u(x,y):K(x,y) & \text{dans } \Gamma-E\\ 0 & \text{aux points de } E.\end{cases}$$

La fonction $v(x,y)$ est ainsi définie partout dans Γ et on a $v(x,0)=0$; cette fonction est, en outre, de classe $C^{(2)}$ à l'intérieur de Γ et constitue dans Γ une solution régulière d'une équation du type parabolique

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\bar{a}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}-b(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}-\bar{c}(x,y)v=0, \tag{2}$$

avec:

$$\bar{c}(x,y)=-\frac{1}{K(x,y)}\mathcal{F}(K)\geqslant 0,\quad b(x,y)>\beta>0. \tag{3}$$

D'après l'hypothèse 4^0 on peut choisir un nombre positif ϱ_0 de sorte que l'on ait $|v(x,y)|<\varepsilon$ pour $|x|\geqslant\varrho_0$. Considérons le rectangle $R_0: -\varrho_0\leqslant x\leqslant\varrho_0$, $0\leqslant y\leqslant h$. En vertu de (3), la borne supérieure de $v(x,y)$ dans R_0, si elle est positive et

la borne inférieure, si elle est négative, sont atteintes sur les côtés de R_0 non situés sur la caractéristique supérieure $y=h$[5]. Or on a: $|v(\pm\varrho, y)|<\varepsilon$ et $v(x,0)=0$. Il en résulte que $|v(x,y)|<\varepsilon$ partout dans R_0, en suite de quoi (ε étant petit à volonté) $v(x,y)\equiv 0$ partout dans Γ, c'est à dire $u(x,y)\equiv 0$ dans $\Gamma - E$.

Il en résulte aussitôt l'unicité de la solution de (1) régulière dans $\Gamma - E$, telle que

(4) $$u(x,0)=\varphi(x) \qquad \text{pour } x \in CE$$

dans la classe de fonctions satisfaisant à l'hypothèse 4° du théorème I.

4. On va démontrer maintenant un théorème analogue au th. III de mon travail, concernant les équations du type elliptique[6]. Ce théorème admet des applications importantes dans la théorie des processus stochastiques[7].

Théorème II. *On suppose que* 1° $\{\varphi_n(x)\}$ *est une suite de fonctions continues pour* $-\infty<x<+\infty$, *tels que* $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$ *sur* CE *et* $\{u_n(x,y)\}$ *une suite de solutions de l'équation* (1) *régulières dans* Γ *et telles que* $u_n(x,0)=$ $=\varphi_n(x)$, 2° *il existe une fonction* $K(x,y)$, *continue et positive dans* $\Gamma - E$, *de classe* $C^{(2)}$ *à l'intérieur de* Γ, *telle que l'on y a* $\mathcal{F}(K)\leqslant 0$ *et que* $\lim K(x,y)=\infty$, *lorsque* $P(x,y)\to P_0(x_0,0)\in E$ *et lorsque* $|x|\to\infty$, 3° *on a* $\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(x)-$ $-\varphi(x)|:K(x,0)=0$ *sur* CE, *cette convergence étant uniforme,* 4° $\varepsilon>0$ *étant arbitrairement choisi, on peut déterminer un nombre* $\varrho>0$, *tel que l'on ait*:

$$|u_n(x,y)|:K(x,y)<\varepsilon$$

pour $|x|>\varrho$ *et* $n=1,2,\ldots,$ 5° *chaque rectangle détaché de* Γ *par des parallèles aux axes des coordonnées est ré-*

---

[5]) Voir le travail cité de M. Gevrey, p. 372.

[6]) M. Krzyżański. Sur les solutions de l'équation linéaire du type elliptique... Studia Math. XI, p. 95—125.

[7]) Voir p. ex. A. Kchintschine. Asimptoticzeskije zakony tieorii wierojatnostiej, Moskwa, 1936. W. Feller. Zur Theorie der stochastische Prozesse. Math. Annalen t. 113 (1936) p. 113—160.

gulier par rapport au 1[er] *problème aux limites pour l'équation* (1).

Alors il existe $\lim_{n\to\infty} u_n(x,y) = u(x,y)$ *partout dans* $\Gamma - E$, *la convergence étant uniforme dans tout ensemble fermé, borné, contenu dans* $\Gamma - E$.

La fonction $u(x, y)$ *constitue dans* $\Gamma - E$ *une solution régulière de l'équation* (1), *satisfaisant à la condition initiale* (4).

Démonstration. Posons $v_n(P) = u_n(P) : K(P)$ pour $P \in \Gamma - E$, $v_n(P) \equiv 0$ dans E, (où l'on a désigné par P le point (x,y)).

Il résulte de l'hypothèse 3⁰ que $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement choisi, on peut déterminer un nombre $N > 0$ tel que

(5) $$|v_p(x, 0) - v_q(x, 0)| < 2\varepsilon \qquad \text{pour } p > N,\ q > N.$$

D'après l'hypothèse 4⁰, on a

(6) $$|v_p(x, y) - v_q(x, y)| < 2\varepsilon$$

pour $|x| > \varrho$, $p, q = 1, 2, \ldots$.

Considérons un rectangle R: $-r \leqslant x \leqslant r$, $0 \leqslant y \leqslant h$, où l'on a $r > \varrho$. L'inégalité (6) subsiste sur la partie de son contour, non située sur la caractéristique $y = h$, pour $p > N$ et $q > N$ (puisque pour $y = 0$ on a (5)).

Or $v_n(x, y)$ satisfont à l'intérieur de Γ à l'équation (2), où l'on a $\bar{c} \geqslant 0$ et $b > 0$. L'inégalité (6) subsiste donc partout dans R. Comme r peut être choisi grand à volonté, on en déduit la convergence de la suite $\{v_n\}$ partout dans Γ, en suite de quoi il existe $\lim u_n(x,y) = u(x,y)$ partout dans $\Gamma - E$; la convergence étant uniforme dans chaque ensemble fermé, limité, contenu dans $\Gamma - E$, la fonction $u(x,y)$ y est continue et satisfait à la condition (4) pour $y = 0$.

Il reste à démontrer que $u(x, y)$ satisfait à l'équation (1) à l'intérieur de Γ.

Or, soit $P_0(x_0, y_0)$ un point quelconque situé à l'intérieur de Γ et R_0 un rectangle détaché de Γ par la caractéristique

$y = \bar{y}$ $(\bar{y} < y_0)$ et les droites $x = x_1$ et $x = x_2$ $(x_1 < x_0 < x_2)$, contenant P_0 à l'intérieur. Soit $\bar{u}(x,y)$ une solution de l'équation (1), déterminée dans R_0 et coïncidant avec $u(x, y)$ sur la partie S_0 du contour de R_0, constituée par les côtés, non situés sur la droite $y = h$.

Une telle solution existe en vertu de l'hypothèse 5^0. On va démontrer que $\bar{u}(x,y) \equiv u(x,y)$ dans R_0. À cet effet on procède comme à la fin de la démonstration du théorème III dans le travail cité dans la note[6)].

On pose notamment:

$$V(x,y) = \bar{u}(x,y) : K(x,y)$$

et on observe que, $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement choisi, on a pour n assez grand

(7) $$|u_n(x,y) - \bar{u}(x,y)| < \varepsilon \qquad \text{sur } S_0$$

et

(8) $$|u_n(x,y) - \bar{u}(x,y)| < \varepsilon \qquad \text{dans } R_0,$$

en suite de quoi

(9) $$|v_n(x,y) - V(x,y)| < \varepsilon : \omega_0 \qquad \text{sur } S_0,$$

ω_0 désignant la borne inférieure de $K(x,y)$ dans R_0. Or $v_n - V$ satisfait dans R_0 à l'équation (2), en suite de quoi l'inégalité (9) subsiste partout dans R_0. Il en résulte que

$$|u_n(x,y) - \bar{u}(x,y)| < \varepsilon \cdot \frac{\Omega_0}{\omega_0},$$

Ω_0 étant la borne supérieure de $K(x, y)$ dans R_0; en tenant compte de (8), on en déduit l'inégalité

$$|u(x,y) - \bar{u}(x,y)| < \varepsilon \left(1 + \frac{\Omega_0}{\omega}\right).$$

Or ε étant petit à volonté, on a $u(x,y) \equiv \bar{u}(x,y)$ partout dans R_0.

Remarque. L'hypothèse 3^0 est réalisée en particulier, lorsque $\{\varphi_n\}$ satisfait aux conditions suivantes:

1^0 F étant un ensemble fermé, contenu dans CE et ε un nombre positif, arbitraire, on peut choisir un nombre $N > 0$ de sorte que $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ pour $n > N$ et $x \in F$; $2\,\varepsilon^0$

étant un nombre positif arbitraire, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que si $x_0 \in E$, l'inégalité:

$$|x - x_0| < \delta$$

entraine:

$$|\varphi_n(x)| : K(x,0) < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\varphi(x)| : K(x,0) < \varepsilon$$

pour tout $x_0 \in E$, $x \in CE$ et $n = 1, 2, \ldots$

5. Comme on l'a déjà signalé, le théorème II est lui — même appliquable dans la théorie des processus stochastiques. On en peut déduire un théorème d'existence en construisant effectivement la suite $\{\varphi_n(x)\}$ conformément aux hypothèses du théorème II. Ceci exige des hypothèses supplémentaires, concernant la fonction $\varphi(x)$.

En particulier, la construction effective de la suite $\{\varphi_n(x)\}$ conforme aux hypothèses du théorème II est toujours possible, lorsque la fonction $\varphi(x)$ est bornée. Soit, en effet, M la borne supérieure de $\varphi(x)$ dans CE. Désignons par G_n l'ensemble des points $x \in CE$, tels que $K(x, 0) > 2M.n$. Les ensembles G_n sont ouverts, et leurs complémentaires, F_n sont fermés. Posons: $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x)$ pour $x \in F_n$ et admettons que $\varphi_n(x)$ varient linéairement dans les intervalles contigus aux F_n. On a alors

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| : K(x,0) < 1/n \quad \text{pour } x \in G_n$$
$$\varphi_n(x) = \varphi(x) \quad \text{pour } x \in F_n,$$

c'est à dire:

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| : K(x, 0) < 1/n \quad \text{dans } CE.$$

6. J'ai traité jusqu'à présent des solutions déterminées dans une région illimitée Γ. Or on peut procéder d'une manière analogue, lorsque l'on remplace la région Γ par un domaine limité D, détaché de Γ par deux courbes: $x = \gamma_1(y)$ et $x = \gamma_2(y)$, qui ne sont nulle part tangentes aux caractéristiques. Cette fois le procédé devient même plus simple, car on n'a besoin d'aucune hypothèse, concernant le comportement de $K(x,y)$ à l'infini. On suppose que les solutions cherchées de l'équation (1) se réduisent

aux fonctions continues le long de ces deux courbes. On a ainsi le premier problème aux limites généralisé, les solutions cherchées devenant discontinues aux points d'un ensemble E, situé sur la caractéristique $y=0$. On peut traiter de même les problèmes analogues, relatifs à une demi — région Γ' qui constitue une partie de Γ, s'étendant a droite ou à gauche d'une courbe $x=\gamma(y)$. On cherche la solution continue dans Γ' sauf aux points d'un ensemble E, situé sur la caractéristique $y=0$.

7. Dans les théorèmes qui viennent d'être démontrés intervenait une fonction $K(x,y)$, jouant le rôle du diviseur amortissant (voir le travail, cité dans la note [6]), en particulier p. 110). Il est évident que la portée de ces théorèmes dépend de la possibilité de la détermination effective de la fonction K, relative à un ensemble donné E des discontinuités. La recherche des fonctions K dans le cas particulier, où E est contenu dans un intervalle de la caractéristique $y=0$, sera entreprise à présent.

Je commence par l'étude de l'intégrale de Weierstrass généralisée. Supposons que l'ensemble E soit *fermé, de mesure nulle* et qu'il soit contenu dans l'intervalle fermé $j=\langle -r, r\rangle$. On peut supposer que les extremités de cet intervalle appartiennent à E.

Soit $\vartheta(x)$ une fonction continue et positive dans l'ensemble ouvert $G=j-E$, telle que 1° $\lim\limits_{x\to x_0\in E}\vartheta(x)=+\infty$, 2° l'intégrale $\int_{-r}^{r}\vartheta(x)dx$ soit convergente.[8]) On peut choisir $\vartheta(x)$ de façon que $\int_{-r}^{r}\vartheta(x)dx=1$.

Considérons l'intégrale

$$\mathfrak{J}_0(x,y)=\int_{-r}^{r}U(x,y;\,s)\,\vartheta(s)\,ds$$

[8]) Pour la construction d'une telle fonction voir S. Saks. Theory of the integral. New-York, 1947, p. 205.

avec

$$U(x, y; s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \exp\left[-\frac{(s-x)^2}{4y}\right].$$

Il est évident qu'elle est convergente pour $y > 0$, car

$$\mathfrak{J}_0(x,y) < \frac{1}{2}(\pi y)^{-1/2} \int_{-r}^{r} \vartheta(s)\, ds.$$

Elle est toujours positive. Quant au comportement de l'intégrale $\mathfrak{J}_0(x,y)$ lorsque $y \to 0$, nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème III. *On a*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \mathfrak{J}_0(x, y) = \begin{cases} \vartheta(x_0) & si\ x_0 \in G \\ +\infty & si\ x_0 \in E \\ 0 & si\ |x_0| > r. \end{cases}$$

D é m o n s t r a t i o n. 1° Supposons que $x_0 \in CE$ et soit δ un nombre positif, tel que $2\delta < \inf_{\xi \in E} |\xi - x_0|$. Désignons par ω_1 le voisinage de x_0 de rayon δ, c'est à dire l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ et par ω_2 celui de rayon 2δ. Soit $\Omega = \mathrm{j}$ si $|x_0| > r$ et $\Omega = \mathrm{j} - \omega_2$ si $x_0 \in G$.

Admettons que $x \in \omega_1$. Si $s \in \Omega$, on a $|x - s| > \delta$ et par suite

$$\int_\Omega U(x, y; s)\, \vartheta(s)\, ds < \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4y}}}{2\sqrt{\pi y}} \int_\Omega \vartheta(s)\, ds \leqslant \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4y}}}{2\sqrt{\pi y}}$$

de sorte que cette intégrale tend vers zéro avec y, pour $x \in \omega_1$. Il en résulte que si $|x_0| > r$, on a $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \mathfrak{J}_0(x, y) = 0$.

Si $x_0 \in G$, on a

$$\mathfrak{J}_0(x, y) = \int_\Omega U(x, y; s)\, \vartheta(s)\, ds + \int_{\omega_2} U(x, y; s)\, \vartheta(s)\, ds.$$

La fermeture de ω_2 ne contenant pas de points de E, la seconde intégrale tend vers $\vartheta(x_0)$ pour $y \to 0$, d'après le théorème classique de W e i e r s t r a s s. On trouve donc

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \mathfrak{J}_0(x,y) = \vartheta(x_0) \qquad \text{pour } x_0 \in G.$$

Supposons en second lieu que $x_0 \epsilon E$. Le nombre $M > 0$ étant choisi à volonté, soit $\delta > 0$ assez petit pour que l'on ait $\vartheta(x) > M$ pour $|x - x_0| < \delta$.

Alors, E étant de mesure nulle, on a:

$$\int_{-r}^{r} U(x, y; s)\, \vartheta(s)\, ds \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} U(x, y; s)\, \vartheta(s)\, ds >$$

$$M \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} U(x, y; s)\, ds.$$

Or, en posant $s = x + 2\sigma y^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} U(x, y; s)\, ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_0-\delta-x}{2y^{\frac{1}{2}}}}^{\frac{x_0+\delta-x}{2y^{\frac{1}{2}}}} e^{-\sigma^2}\, d\sigma.$$

Supposons que $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$; alors

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} U(x, y; s)\, ds > \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\delta}{4\sqrt{y}}}^{\frac{\delta}{4\sqrt{y}}} e^{-\sigma^2}\, d\sigma$$

et on peut choisir le nombre η de sorte que

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} U(x, y; s)\, ds > 1 \quad \text{pour } y < \eta.$$

On a donc:

$$\int_{-r}^{r} U(x, y; s)\, ds > M$$

pour $|x - x_0| + y < \min[\frac{\delta}{2}, \eta]$.

8. Considérons le cas particulier, où l'ensemble E est constitué par un nombre fini de points isolés $x_0^{(p)}$ $(p = 1, 2, \dots n)$. On peut choisir cette fois la fonction $\vartheta(x)$ de sorte que la fonction $\mathfrak{I}_0(x, y)$ croisse pour $y \to 0$ plus rapidement que $y^{-\frac{a}{2}}$, où $a < 1$, mais peut s'approcher de 1 à volonté.

A chaque point $x_0^{(p)}$ on fait correspondre un voisinage $\omega_p = (x_0 - \delta_p,\ x_0 + \delta_p)$, les nombres δ_p étant choisis de façon que les intervalles ω_p soient non impiétants. On pose cette fois

$$\vartheta(x) = \delta_p^\alpha \,| x - x_0^{(p)} |^{-\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

lorsque $x \epsilon \omega_p$ et $\vartheta(x) \equiv 1$ pour $x \epsilon \ \ \mathrm{j} - \sum_{p=1}^{n} \omega_p$.

La fonction $\vartheta(x)$ étant ainsi définie, il est aisé d'étudier l'ordre de la croissance de $\mathfrak{I}_0$ au voisinage des $x_0^{(p)}$.

Comme

$$\mathfrak{I}_0(x,y) > \int_{\omega_p} U(x,y;s)\,\vartheta(s)\,ds \tag{11}$$

il suffit d'étudier l'intégrale qui figure dans le second membre de l'inégalité (11).

Pour simplifier les calculs on suppose que $x_0^{(p)} = 0$ et on pose $\delta_p = \delta < 1$. Alors

$$\int_{\omega_p} U(x,y;s)\ \vartheta(s)\,ds = \delta^\alpha \int_{-\delta}^{\delta} U(x,y;s)\,|\,s\,|^{-\alpha}\,ds =$$

$$= 2\,\delta^\alpha \int_{-\frac{\delta+x}{2\sqrt{y}}}^{\frac{\delta-x}{2\sqrt{y}}} e^{-\sigma^2}\,| x + 2y^{\frac{1}{2}}\,\sigma |^{-\alpha}\,d\sigma\ .$$

Soit

$$| x | < \frac{\delta}{2}, \quad y < \frac{\delta^2}{16};\ \text{on a alors}$$

$$\int_{\omega_p} U(x,y;\,s)\,\vartheta(s)\,ds > 2\,\delta^\alpha \int_{-1}^{1} e^{-\sigma^2}\,| x + 2y^{1/2}\,\sigma |^{-\alpha}\,d\sigma >$$

$$> 2\mathrm{g}\,\delta^\alpha\,(| x | + 2y^{1/2})^{-\alpha},$$

où l'on a posé

$$\mathrm{g} = \int_{-1}^{1} e^{-\sigma^2}\,d\sigma\ .$$

Soit ϱ un nombre positif inférieur à $\frac{\delta^2}{16}$ (et à fortiori à $\frac{\delta}{2}$).

Si $|x|+y<\varrho$, on a: $|x|+2y^{\frac{1}{2}}<2\left(|x|^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)<2\sqrt{2}(|x|+$ $+y)^{\frac{1}{2}}<2\sqrt{2}\varrho^{\frac{1}{2}}$, en suite de quoi $\mathcal{J}_0(x,y)>\int\limits_{\omega_p} U(x,y;s)\,\vartheta(s)\,ds$ $>2\left(\frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right)\cdot g^a\cdot\varrho^{-\frac{a}{2}}$, de sorte que $\mathcal{J}_0(x,y)$ augmente comme $\varrho^{-\frac{a}{2}}$, au moins, lorsque $\varrho\to 0$ (δ étant fixé).

9. Passons maintenant à la détermination du diviseur, amortissant $K(x,y)$.

On a besoin de faire plusieurs hypothèses supplémentaires concernant les coefficients de l'équation (1).

On suppose notamment que le coefficient $a(x,y)$ admet à l'intérieur de Γ les dérivées partielles du 1er ordre continues et que $b(x,y)\equiv 1$. On peut alors par un simple changement de la fonction inconnue[9])

$$u(x,y)\equiv w(x,y).\ exp\ \left[\tfrac{1}{2}\int\limits_0^x a(s,y)\,ds\right]$$

éliminer le composant, contenant la dérivée $\frac{\partial w}{\partial x}$, de sorte que l'équation (1) se ramène à la forme

(12) $$\mathcal{F}_1(w)\equiv\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial w}{\partial y}-c_1(x,y)\,w=0\ .$$

On suppose, de plus, que dans l'équation (12) le coefficient $c_1(x,y)$ est borné inférieurement par un trinôme du second ordre, plus précisément, qu'il existe deux nombres positifs A et B tels que:

(13) $$c_1(x,y)>-(Ax^2+B)$$

partout à l'intérieur de Γ.

---

[9]) Transformation de H. Block. Arkiv de Stockholm. Bd IV.

Posons

$$\mathfrak{I}(x,y) = \int_{-r}^{r} \mathfrak{N}(x-s,y)\,\vartheta(s)\,ds,$$

où le noyau

$$\mathfrak{N}(x-s,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\, exp\,[(-\frac{1}{4y}+\lambda)\,(x-s)^2+\tau y],$$

λ et τ étant deux constantes positives, qu'on va choisir convenablement dans la suite.

L'intégrale $\mathfrak{I}(x,y)$ se comporte de même que $\mathfrak{I}_0(x,y)$ lorsque le point (x,y) tend vers un point de la caractéristique $y=0$. En effet, comme $|s|<r$, on a $|x-s|<|x|+r$, par suite

(14) $$U(x,y;s) < \mathfrak{N}(x,y;s) < U(x,y;s)\cdot e^{\lambda(|x|+r)^2+\tau y}$$

et

$$\mathfrak{I}_0(x,y) < \mathfrak{I}(x,y) < \mathfrak{I}_0(x,y)\,e^{\lambda(|x|+r)^2+\tau y}.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} \mathfrak{I}(x,y)=0$ pour $|x_0|>r$ et que $\mathfrak{I}(x,y)$ augmente infiniment, comme $\mathfrak{I}_0(x,y)$, lorsque le point (x,y) tend vers un point de E.

Enfin, si $x_0 \in G$, soient ω_1 et ω_2 les intervalles introduits dans la démonstration du théorème III et $\Omega = j-\omega_2$. Supposons que $x\in\omega_1$. L'intégrale $\int_{\Omega} \mathfrak{N}(x,y;s)\,\vartheta(s)\,ds$ tend vers zéro avec y, en vertu de (14). Quant à l'intégrale étendue à ω_2, observons que si $s\in\omega_2$ on a $|x-s|<4\delta$ et par suite

$$\int_{\omega_2} U(x,y;s)\,\vartheta(s)\,ds < \int_{\omega_2} \mathfrak{N}(x,y;s)\,\vartheta(s)\,ds <$$
$$e^{16\lambda\delta^2+\tau y} \int_{\omega_2} U(x,y;s)\,\vartheta(s)\,ds.$$

Il en résulte que $\varepsilon>0$ étant arbitrairement petit, on peut choisir un nombre $\eta>0$ tel que

$$\mathfrak{I}_0(x,y)-\varepsilon < \mathfrak{I}(x,y) < e^{16\lambda\delta^2+\tau y}\,\mathfrak{I}_0(x,y)+\varepsilon \qquad \text{pour } y<\eta.$$

Or δ peut être choisi petit à volonté. Donc, en vertu du théorème III,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \mathfrak{I}(x,y) = \vartheta(x_0) \qquad \text{pour } x\in G.$$

Examinons maintenant $\mathcal{F}_1(\mathfrak{I})$. On a

$$\frac{1}{\mathfrak{N}}\mathcal{F}_1[\mathfrak{N}]=2\lambda(2\lambda-1/y)\,(x-s)^2+2\lambda-\tau-c_1(x,y);$$

en vertu de (11) on a

$$\frac{1}{\mathfrak{N}}\mathcal{F}_1[\mathfrak{N}]<2\lambda(2\lambda-1/y)\,(x-s)^2+(2\lambda-\tau)+Ax^2+B=$$
$$=2\lambda(2\lambda-1/y)\,(x-s)^2+(2\lambda-\tau)+A(x-s)^2+2As(x-s)+$$
$$+As^2+B.$$

Or $2s(x-s)\leqslant s^2+(x-s)^2$ et $|s|\leqslant r$, en suite de quoi

$$\frac{1}{\mathfrak{N}}\mathcal{F}_1[\mathfrak{N}]<2[\lambda(2\lambda-1/y)+A]\,(x-s)^2+2Ar^2+B+(2\lambda-\tau).$$

Posons $\lambda=\sqrt{A},\ \tau=2(Ar^2+\sqrt{A})+B+\tau_0,$

τ_0 étant un nombre positif arbitraire. Supposons, en outre que la hauteur h de la couche Γ satisfasse à l'inégalité

$$h\leqslant\frac{1}{3\sqrt{A}}.$$

Alors:

$$\frac{1}{\mathfrak{N}}\mathcal{F}_1[\mathfrak{N}]<-\tau_0<0$$

et par suite

$$\mathcal{F}_1(\mathfrak{I})=\int_{-r}^{r}\mathcal{F}_1[\mathfrak{N}]\,\vartheta(s)ds<-\tau_0\int_{-r}^{r}\mathfrak{N}(x-s,y)\,\vartheta(s)\,ds,$$

c'est à dire

(15) $$\mathcal{F}_1(\mathfrak{I})<-\tau_0\,\mathfrak{I}\,.$$

La fonction $\mathfrak{I}(x,y)$, augmentée d'une constante positive, satisfait à toutes les conditions qu'on imposait au diviseur $K(x,y)$ aux n- ros 3—5, sauf à celle de tendre vers $+\infty$ avec $|x|$.

10. Dans le travail cité au n-ro 2 (note 4), j'ai introduit le diviseur amortissant, qui dans le cas des deux variables indépendantes a pour expression:

$$H\,(x,y)=exp\left[\frac{kx^2}{1-\mu y}+\nu y\right]$$

k étant un paramètre, μ et ν les fonctions de k.

La fonction H est positive; elle croît à l'infini au moins comme e^{kx^2}. On choisit actuellement les fonctions $\mu(k)$ et $\nu(k)$ de façon que l'on ait $\mathcal{F}_1[H]<0$.

On a notamment

$$\frac{1}{H}\mathcal{F}_1[H]=\frac{2k}{1-\mu y}+\frac{k(4k-\mu)}{(1-\mu y)^2}x^2-\gamma-c_1(x,y);$$

en tenant compte de (11) on en déduit l'inégalité

$$(16)\quad \frac{1}{H}\mathcal{F}_1[H]<\frac{2k}{1-\mu y}+\left[\frac{k}{(1-\mu y)^2}(4k-\mu)+A\right]x^2+B-\nu.$$

Posons

$$(17)\quad \mu=4k+\frac{A}{k}\qquad \nu=B+\frac{2k}{1-\mu h}+\nu_0,$$

h étant la hauteur de la région Γ, $\nu_0>0$ arbitraire.

On suppose que $h<\frac{1}{\mu}$.

Il résulte de (17) que

$$(18)\quad \frac{k}{(1-\mu y)^2}(4k-\mu)+A<-\frac{A}{(1-\mu y)^2}+A<0;$$

d'autre part

$$\frac{2k}{1-\mu y}<\frac{2k}{1-\mu h},$$

en suite de quoi on déduit de (16), en tenant compte de (17) et (18), l'inégalité:

$$(19)\quad \frac{1}{H}\mathcal{F}_1[H]<-\nu_0.$$

11. On peut passer maintenant à la détermination définitive du diviseur amortissant $K(x,y)$. On pose notamment

$$K(x,y)=\mathcal{J}(x,y)+H(x,y).$$

La fonction $K(x,y)$ est continue dans $\Gamma-E$ à condition que $h<min\left(\frac{1}{\mu},\ \frac{1}{3\sqrt{A}}\right)$; elle est positive, croît au moins comme e^{kx^2} lorsque $|x|\to+\infty$ et tend vers $+\infty$ lorsque le point $P(x,y)$ tend vers un point de E. On a, en outre, d'après (15) et (19)

$$\mathcal{F}_1(K)<-\tau_0\,\mathcal{J}-\nu_0\,H.$$

On peut choisir $\nu_0 = \tau_0$. Alors:

$$\frac{1}{K} \mathcal{F}_1(K) < -\tau_0 < 0.$$

La fonction $K(x,y)$ satisfait ainsi à toutes les conditions qu'on a lui imposé aux théorèmes I et II.

12. Dans le cas particulier de l'équation (1) de la diffusion sous l'action de la force $f(x)$ le coefficient $c_1(x,y)$ dans l'équation réduite (12) a pour expression:

$$c_1(x,y) = \frac{\beta}{4D} \left[f'(x) + \frac{\beta}{4D} f^2(x) \right],$$

donc $c_1(x,y) > \frac{\beta}{4D} f'(x)$. Pour que c_1 satisfasse à la condition 113), il suffit que l'on ait

$$f'(x) > -(A' x^2 + B')$$

(où A' et B' sont deux constantes positives). Cette dernière condition est en particulier satisfaite, lorsque la dérivée $f'(x)$ est bornée inférieurement. Ceci a lieu, en particulier, dans le cas de la diffusion sous l'action de la force élastique $f(x) = -mx$; ce cas fut traité en détail par Smoluchowski[10].

13. Précisons enfin quelques conséquences importantes, concernant l'unicité des solutions de l'équation (12) régulières dans l'ensemble $\Gamma - E$, l'ensemble E étant fermé, borné et de mesure nulle.

Nous supposons que le coefficient $c_1(x,y)$ vérifie la condition (13).

Soit, en premier lieu, $w(x,y)$ une solution de l'équation (12) réulière dans $\Gamma - E$, bornée à l'intérieur du rectangle R_0: $-r \leqslant x \leqslant r$, $0 \leqslant y \leqslant h$, de classe E_2 en dehors de R_0. Plus précisément, on suppose l'existence des deux nombres M_0 et k_0, tels que l'on ait

$$|w(x,y)| < M_0 e^{k_0 x^2}$$

pour $|x| > r$. Supposons que $w(x, 0) = 0$ pour $x \in CE$. Soit $K(x,y)$ le diviseur amortissant, déterminé aux n-ros

10) Voir la note 1).

9—11. Si l'on choisit $k > k_0$ dans l'expression pour $H(x,y)$, on a $K(x,y) > e^{k_0 x^2}$ et $w(x,y)$ satisfait à l'hypothèse 4⁰ du théorème I (à condition que la hauteur h de Γ soit suffisamment petite, voir n-ro 10), en suite de quoi on a, en vertu du théorème I, $w(x,y) \equiv 0$ dans $\Gamma - E$. On peut donc énoncer le théorème suivant.

Théorème IV: *Si 1⁰ le coefficient c_1 de l'équation* (12) *satisfait à la condition* (13), *2⁰ l'ensemble E est de mesure nulle, alors la seule solution de* (12), *régulière dans $\Gamma - E$, bornée à l'intérieur du rectangle R_0: $-r \leqslant x \leqslant r$, $0 \leqslant y \leqslant h$, de classe E_2 en dehors de R_0, s'annulant pour $y = 0$ en dehors de E, est $w(x,y) \equiv 0$.*

En particulier, la seule solution de (12) *régulière et bornée dans $\Gamma - E$, s'annulant avec y en dehors de E est $w(x,y) \equiv 0$.*

Il en résulte l'unicité, dans la classe de fonctions bornées dans $\Gamma - E$, de la solution de l'équation (12), déterminée par la condition initiale (4).

Supposons ensuite que l'ensemble E se compose d'un nombre fini n de points isolés: $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots x_0^{(n)}$. Si l'on choisit pour $\vartheta(s)$ dans l'expression pour $\mathfrak{I}(x,y)$ (voir n-ro 9) la fonction déterminée au n-ro 8, on déduit du théorème I le théorème suivant:

Théorème V. *Si le coefficient c_1 de l'équation* (12) *satisfait à la condition* (13) *et si l'ensemble E est constitué par un nombre fini n de points: $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots x_0^{(n)}$, alors la seule solution de l'équation* (12), *régulière dans $\Gamma - E$, qui 1⁰ satisfait à l'intérieur du rectangle R_0 à la condition:*

$$|w(x,y)| \leqslant M_0 \left[|x - x_0^{(p)}| + y \right]^{-\frac{\alpha_0}{2}} \qquad (p = 1, 2, \ldots n)$$

où M_0 et $\alpha_0 < 1$ sont deux constantes positives, 2⁰ est de classe E_2 en dehors de R_0, 3⁰ s'annule avec y en dehors de E, est $w(x,y) \equiv 0$.

Les deux théorèmes qui viennent d'être énoncés, s'appliquent en particulier à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Państwowy Instytut Matematyczny.

SYSTÈMES DES ÉQUATIONS ET DES INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES AUX DEUXIÈMES MEMBRES MONOTONES ET LEURS APPLICATIONS

Par

TADEUSZ WAŻEWSKI (Kraków)

Considérons l'équation différientelle

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) \tag{1}$$

et supposons que la fonction g soit continue dans un ensemble ouvert Ω.

On sait que:

α_1) Par tout point (t_0, y_0) de Ω il passe une intégrale supérieure *bilatérale* c.-à-d. définie à gauche et à droite de t_0. Elle se laisse prolonger dans les deux sens jusqu'à la frontière de Ω.

α_2) Si $A=(t_0, a)$, $B=(t_0, b)$ sont deux points de Ω pour lesquels $a \leqslant b$ et $y=\varphi(t)$ est une intégrale quelconque issue de A tandis que $y=\psi(t)$ et l'intégrale supérieure de (1) issue de B, alors on a $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$ dans tout intervalle dans lequel ces intégrales existent.

De la il résulte en particulier que:

α_3) Si pour les points A et B, introduits tout à l'heure, on a l'inégalité $a \leqslant b$ alors à chaque intégrale $y=\varphi(t)$ issue de A correspond une intégrale $y=\psi(t)$ issue de B, telle que $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$ dans un voisinage bilatéral et suffisamment petit de t_0.

Il se pose le problème de savoir dans quelle mesure ces propriétés α_1, α_2 et α_3 se laissent étendre aux systèmes

$$\frac{dy_i}{dt} = g^i(t, y_1, \ldots, y_n), \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{2}$$

les fonctions g^i étant, par hypothèse, continues dans un ensemble ouvert Ω.

Voici d'abord quelques définitions qui faciliteront le langage et l'écriture.

Soient

$$A=(t_0, a_1, \ldots, a_n), \quad B=(t_0, b_1, \ldots, b_n)$$

deux points dont les premières coordonnées t_0 sont identiques. Nous dirons que B majore A (ou A minore B) lorsque $a_i \leqslant b_i$, $(i=1, \ldots, n)$.

Une suite de fonctions $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ sera désignée, tout court, par $\Phi(t)$

$$\Phi(t)=(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \tag{3}$$

Nous introduisons les notations

$$\Phi'(t) = (\varphi'_1(t), \ldots, \varphi'_n(t))$$
$$Y = (y_1, \ldots, y_n)$$

Le système (2) prendra ainsi la forme

$$\frac{dy_i}{dt} = g^i(t, Y), \quad (i=1, \ldots, n) \tag{2 bis}$$

La notation

$$G(t, Y) = (g^1(t, Y), \ldots, g^n(t, Y))$$

permettra d'écrire le système (2) sous la forme vectorielle

$$\frac{dY}{dt} = G(t, Y) \tag{2 ter}$$

Si $\Psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$ est une intégrale du système (2 ter), on aura

$$\Psi'(t) \equiv G(t, \Psi(t)).$$

On dira que le système (2 ter) majore le système

$$\frac{dy_i}{dt} = f^i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad (i=1, .., n)$$

ou, tout court, le système

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y) \tag{4}$$

dans Ω lorsque

$$F(t, Y) \leqslant G(t, Y) \quad (\text{dans } \Omega)$$

c.-à-d. lorsque $f^i \leqslant g^i$ dans Ω.

Il sera commode de distinguer, relativement au système (2 ter), entre les *intégrales supérieures* (ou inférieures) à *droite, à gauche* et *bilatérales.*

On dira que $\Psi(t)$ avec $\Psi(t_0) = (a_1, \ldots, a_n)$ constitue l'intégrale supérieure à droite *relative au point initial*

$$A = (t_0, a_1, \ldots, a_n) \text{ et à l' intervalle } t_0 \leqslant t \leqslant \gamma$$

lorsque, pour *chaque* intégrale $\Phi(t)$ issue de A on a $\Phi(t) \leqslant \Psi(t)$ dans *chaque* intervalle $t_0 \leqslant t < \beta \leqslant \gamma$ dans lequel $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ existent.

Les définitions des intégrales supérieures à gauche et des intégrales supérieures bilatérales ainsi que des intégrales inférieures des trois espèces sont analogues.

La continuité das fonctions g^i ne garantit pas l'existence de l'intégrale supérieure à droite.

M. Fukuhara*) a envisagé les systèmes des équations (2) remplisant *l'Hypothèse K* (cf. § 1) consistant en ce que la fonction g^i, $(i = 1, \ldots, n)$, est continue et croissante au sens large par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ séparément.

M. Kamke**) a donné une simple démonstration de ce que, sous l'Hypothèse K par tout point A de Ω il passe une intégrale supérieure à droite relative à A et à un intervalle $t_0 \leqslant t < \beta$ laquelle intégrale *tend vers la frontière* de Ω lorsque t tend en croissant vers β, $(\beta \leqslant +\infty)$.

Or, dans cette hypothèse, ce théoreme n'est pas tout à fait strict (cf. l'Exemple du § 3)***), c'est pourquoi nous avons cru utile de revenir à sa démonstration basée sur la même méthode, abstraction faite de quelques modifications. Ce théorème devient strict lorsque l'on admet accessoirement que l'ensemble Ω jouit d'une certaine *Propriété P* (cf. § 1).

---

*) Japanese Journal of Mathematics 6 (1930) p. 269—280.

**) E. Kamke. *Zur Theorie Gewöhnlicher Differentialgleichungen* II. Acta Mathematica 58 (1932 p. 57—85. Satz 7.

***) Dans cette hypothèse ne subsistent que certaines propositions de caractère *local* (cf. Propositions 3 et 4 du § 3).

Une remarque critique du même genre se rapporte au suivant théorème de M. Fukuhara traité aussi par M. Kamke****):

Si le système (2 ter) satisfait à l'Hypothèse K (dans Ω), majore le système (4) et $A \leqslant B$ alors l'intégrale supérieure à droite du système (2 ter) issue de B majore toutes les intégrales $\Phi(t)$ du système (4) issues de B (cf. l'Exemple du § 6)*****). Ce théorème devient juste lorsque l'on admet accessoirement la Propriété P relativement à Ω.

Nous démontrons un théorème plus général bien maniable dans certaines applications: Si le système (2 ter) remplit l'Hypothèse K et Ω jouit de la propriété P et lorsque l'on a, pour une courbe continue $Y = \Phi(t)$ issue de A vers la droite,

$$\underline{D}_+ \Phi(t) \leqslant G(t, \Phi(t))^{*)} \tag{5}$$

alors on a, à droite de A,

$$\Phi(t) \leqslant \Psi(t) \tag{6}$$

où $\Psi(t)$ désigne l'intégrale supérieure à droite de (2 ter) issue de A (Théorème 2 du § 1).

Il se pose le problème de savoir si l'Hypothèse K associée à la Propriété P représente l'hypothèse la plus générale dans laquelle a lieu la limitation fournie par ce théorème. La réponse, obtenue dans une voie bien simple, est positive au sens précisé par le théorème suivant (Théorème 3 du § 2):

Si 1⁰) les fonctions g^i sont continues dans Ω ouvert qui jouit de la Propriété P.

2⁰) pour toute couple de points A et B appartenant à Ω et tels que $A \leqslant B$ et à toute intégrale $\Phi(t)$ du système (2 ter) issue de A**) correspond une intégrale $\Psi(t)$ du même système issue de B, telle que

$$\Phi(t) \leqslant \Psi(t) \tag{7}$$

****) E. Kamke l. c. Satz 9.

*****) Ce théorème peut n'être pas juste dans *aucun* voisinage à droite de A, tout petit qu'il soit. Il n'est donc pas juste même au sens local.

*) On a, par définition, $\underline{D}+\Phi(t) = (\underline{D}+\varphi_1(t), \ldots, \underline{D}+\varphi_n(t)$ où $D+\varphi_i(s)$ désigne le nombre dérivé inférieur à droite de $\varphi_i(t)$.

**) Ceci veut dire que $\Phi'(t) = G(t, \Phi(t))$. Si l'on remplace cette égalité dans l'énoncé du présent théorème, par l'inégalité (5), l'inégalité (7) reste vraie a fortiori.

dans un petit voisinage *à droite* de A et B, alors le système (2 ter) remplit l'Hypothèse K dans Ω.

Si nous supposons en plus que l'inégalité (7) ait lieu dans un voisinage bilatéral de A et B alors (cf. Théorème 4 du § 5) le système (2 ter) est forcément de la forme

$$\frac{d y_i}{d t} = g^i(t, y_i), \quad (i=1, \ldots, n) \tag{8}$$

où la fonction g^i ne dépend d'aucune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, y_n$.

Ce système présente une „juxtaposition" des n équations dont chacune séparément présente une équation à une fonction inconue.

Nous voyons ainsi que la propriété α_3 d'une seule équation différentielle, relative au voisinage *bilatéral*, ne peut pas être étendue aux systèmes d'équations différentielles à l'exception *du cas banal d'une juxtaposition* des équations à une fonction inconnue.

On voit aussi que, pour Ω jouissant de la Propriété P ce sont *exclusivement les systèmes d'équations différentielles remplissant l'Hypothèse K qui se prêtent à une majoration des intégrales de tous les systèmes minorés* dans un voisinage à droite du point initial. *)

En posant $t = -\tau$ dans l'équation (2) on obtient un système

$$\frac{d y_i}{d \tau} = h^i(\tau, y_1, \ldots, y_n)$$

tel que la fonction h^i, $(i=1, \ldots, n)$ est décroissante au sens large relativement à chacune de variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$.

Pour les intégrales de ce système auront lieu les propriétés analogues dans un voisinage à gauche du point initial.

Nous appliquons le théorème relatif à l'inégalité (5) à la *limitation des modules d'intégrales* (§ 8 et 9) et nous en

*) C'est une simple conséquence du Théorème 3 du § 2.

déduisons un *critère d'unicité* (§ 10) consistant à la comparaison d'un système avec un autre.

Dans le § 9 nous indiquons une *méthode de solution approchée* des systèmes d'équations différentielles et de la limitation de l'erreur. A titre d'exemple nous donnons une limitation (meuilleure que les limitations courantes) de l'erreur que l'on commet en supprimant dans le développement de Taylor des seconds membres d'un système, les puissances supérieures à 1 et en considérant les intégrales du système ainsi simplifié comme solutions approchées du système primitif.

Le terrain d'applications des inégalités différentielles traitées dans le présent travail est vaste.

Nous avons énoncé certains propositions moins générales sur ce sujet dans nos travaux antérieurs et nous les avons appliquées à:
1[0]) la *limitation du domaine d'existence* des intégrales des *équations aux dérivées partielles* du premier ordre, **)
2) problème d'unicité et de la *limitation des intégrales des équations aux dérivées partielles* du premier ordre et de certains systèmes de telle sorte, ***)
3) *problème d'existence* des intégrales de certains *systèmes d'équations aux dérivées partielles* du premier ordre, ****)
4) la limitation du domaine d'existence et des modules des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires *dans le domaine des variables complexes.* *****)

Un théorème remarquable rentrant dans le même ordre d'idées a été trouvé par M. J. Mikusiński *) et appliqué à un problème constituant une généralisation du problème de Sturm.

**) Ces Annales T. XII (1933) p. 8 et T. XIII (1934) p. 3.

***) Rendiconti dei Lincei T. XVIII serie 6, 2[0] sem, fasc. 9 (1933) p. 373. *Annali* di Matematica T. XV (1936—37) p. 1.

****) Ces Annales T. XV 1936 p. 103.

*****) Ces Annales T. XVI (1935) p. 97.

*) J. Mikusiński. Sur un problème d'interpolation pour les intégrales des équations différentielles ordinaires (Ann. Soc. Polon. Math. T. XIX p. 165).

M. J. Szarski **) a démontré que l'inégalité (6) subsiste lorsque l'on remplace l'inégalité (5) par l'inégalité

$$\Phi'_a(t) \leqslant G(t, \Phi(t))$$

et lorsque l'on suppose que cette inégalité ait lieu *presque partout*, que les fonctions de la suite $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ soient absolument continues généralisées au sens plus large et le premier membre de cette inégalité designe la suite des dérivées *approximatives* des fonctions $\varphi_i(t)$.

§ 1. Systèmes aux deuxièmes membres croissants. Intégrales supérieure et inférieure. Théorèmes sur les inégalités différentielles.

Hypothèse H. 1°) Les fonctions

$$f^i(t, y^1, \ldots, y^n) \quad (i = 1, \ldots. n) \tag{1, 1}$$

sont continues dans un ensemble ouvert Ω de l'espace des points $(t, y^1, \ldots, y^n)$, 2°) Si, pour un i quelconque $(i = 1, \ldots, n)$ les points

$$A_i = (t, a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$
$$B_i = (t, b_1, \ldots, b_{i-1}, c, b_{i+1}, \ldots, b_n)$$

appartiennent à Ω et

$$a_\nu \leqslant b_\nu, \ (\nu = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$$

alors

$$f^i(A_i) \leqslant f^i(B_i).$$

Hypothèse K. 1°) La fonction f^i, (cf. 1, 1) est continue dans un ensemble ouvert Ω, 2°) Elle est une fonction croissante (au sens large) de chacune des variables $y^1, \ldots, y^{i-1}$, $y^{i+1}, \ldots, y^n$ séparément. *)

Remarque. L' Hypothèse *H* a pour coséquence l'Hypothèse *K*. L'inverse n'est vrai que pour une classe tout-à-fait spéciale des ensembles Ω.

**) J. Szarski. Sur un système d'inégalités diffférentielles (Ann. Soc. Polon. de Math. T. XX. p. 126).

*) C.-à-d. $f^i(t, y^1, \ldots, y^{j-1}, k^j, y^{j+1}, \ldots, y^n) \geqslant f^i(t, y^1, \ldots, y^{j-1}, l^j, y^{j+1}, \ldots, y^n)$ lorsque $i \neq j$ et $k^j \geqslant l^j$. On ne suppose pas que f^i soit croissante relativement à y^i et t.

Afin de caractériser une telle classe nous introduirons la notion suivante.

Soient $P=(\tau, p^1, \ldots, p^n)$, $Q=(\tau, q^1, \ldots, q^n)$ deux points du plan $t=\tau$. On dira que

$$P \leqslant Q$$

lorsque $p^i \leqslant q^i$, $(i=1, \ldots, n)$. On dira qu'une ligne polygonale des sommets $A_1, \ldots, A_r$ situés dans un plan $t=\tau$ est simplement croissante lorsque $A_\nu \leqslant A_{\nu+1}$, $(\nu=1, \ldots, r-1)$ et lorsque chaque segment $[A_\nu, A_{\nu+1}]$ est parallèle à un des axes $y^1, \ldots, y^n$.

Propriété P. Nous dirons qu'un ensemble ouvert Ω de l'espace des points $t, y^1, \ldots, y^n$ jouit de la Propriété P lorsque toute couple des points

$$A=(\tau, a_1, \ldots, a_{j-1}\, c, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$
$$B=(\tau, b_1, \ldots, b_{j-1}, c, b_{j+1}, \ldots, b_n),$$

apartenant à Ω et tels que $A \leqslant B$, se laisse joindre par une ligne polygonale simplement croissante qui est contenue dans Ω.

La Propriété P a lieu lorsque, en particulier, pour chaque couple de points P, Q, $(P \leqslant Q)$ de la section de Ω par un plan quelconque $t=\tau$, le segment $[A, B]$ fait partie de Ω.

L'ensemble Ω jouit évidemment aussi de la Propriété P lorsque chaque section de Ω par le plan $t=c$ constitue un paralellépipède

$$-\infty \leqslant \alpha(c) < y_i < \beta(c) \leqslant +\infty \text{**)}$$

On a évidemment la

Proposition 1. Pour tout ensemble Ω jouissant de la Propriété P les Hypothèses H et K sont équivalentes.

Proposition 2. Dans le cas $n=1$ les Hypothèses H et K sont évidemment vérifiées pour tout ensemble Ω des points (t, y_1).

Dans le cas $n=2$ les Hypothèses H et K sont évidemment équivalentes pour tout ensemble Ω des points (t, y_1, y_2).

**) Ce paralellépipède peut coïncider, en particulier. avec le plan $t=c$ tout entier.

Lemme 1. Admettons l'hypothèse H relativement aux deuxièmes membres du système des équations différentielles

$$\frac{dy^i}{dt} = f^i\,(t, y^1, \ldots, y^n), \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (1, 2).$$

Nous supposons en plus que la courbe

$$y^i = \psi^i\,(t), (i = 1, \ldots, n)$$

envisagée dans l'intervalle

$$t_0 \leqslant t < \alpha \qquad (1, 3)$$

soit contenue dans Ω et continue dans cet intervalle et que

$$y^i = \varphi^i\,(t), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

soit une intégrale du système (1,2) définie dans le même intervalle c.-à-d. que

$$\frac{d\varphi^i}{dt} \equiv f^i\,(t, \varphi^1\,(t), \ldots, \varphi^n\,(t)), (i = 1, \ldots, n).$$

Ceci étant admis on a les propriétés suivantes:

I. Si pour $i = 1, \ldots, n$

$$\psi^i\,(t_0) \leqslant \varphi^i\,(t_0)$$

$$\overline{D}_+ \psi^i\,(t) < f^i\,(t, \psi^1\,(t), \ldots, \psi^n\,(t)), \quad (t_0 < t < \alpha)$$

$$\overline{D}_- \psi^i\,(t) < f^i\,(t, \psi^1\,(t), \ldots, \psi^n\,(t)), \quad (t_0 < t < \alpha)$$

alors pour les mêmes indices i

$$\psi^i\,(t) < \varphi^i\,(t), \qquad (t_0 < t < \alpha) \qquad (1,4)$$

II). Si pour $i = 1, \ldots, n$

$$\psi^i\,(t_0) \geqslant \varphi^i\,(t_0),$$

$$\underline{D}_+ \psi^i\,(t) > f^i\,(t, \psi^1\,(t), \ldots, \psi^n\,(t)), \; (t_0 \leqslant t < \alpha)^*)$$

$$\underline{D}_- \psi^i\,(t) > f^i\,(t, \psi_1\,(t), \ldots, \psi^n\,(t)), \; (t_0 < t < \alpha)$$

alors pour les mêmes indices i

$$\psi^i\,(t) > \varphi^i\,(t), \; (t_0 < t < \alpha)$$

Démonstration. Pour un $\varepsilon > 0$ suffisament petit l'inégalité (1,4) a lieu dans l'intervalle $t_0 < t_0 + \varepsilon$. C'est évident pour les indices i pour lesquels $\psi^i(t_0) < \varphi^i(t_0)$. C'est aussi vrai

---

*) $\overline{D}_+ \psi$; $\overline{D}_- \psi$ désignent respectivement les nombres dérivés supérieurs à droite et à gauche, $\underline{D}_+ \psi$, $\underline{D}_- \psi$ les nombres dérivés de ψ inférieurs à droite et à gauche.

lorsque $\psi^i(t_0) = \varphi^i(t_0)$ car on a $\bar{D}_+ \psi^i(t_0) <$
$f^i(t_0, \psi^1(t_0), \ldots, \psi^{i-1}(t_0), \psi^i(t_0), \psi^{i+1}(t_0), \ldots, \psi^n(t_0)) =$
$f^i(t_0, \psi^1(t_0), \ldots, \psi^{i-1}(t_0), \varphi^i(t_0), \psi^{i+1}(t_0), \ldots, \psi^n(t_0)) \leqslant$
$f^i(t_0, \varphi^1(t_0), \ldots, \varphi^{i-1}(t_0), \varphi^i(t_0), \varphi^{i+1}(t_0), \ldots, \varphi^n(t_0)) =$
$\left(\frac{d\varphi^i}{dt}\right)_{t=t_0}$.

Il en résulte que $\bar{D}_+(\psi^i(t) - \varphi^i(t))_{t=t_0} < 0$, $\psi^i(t_0) - \varphi^i(t_0) = 0$ et, par suite, on a pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit $\psi^i(t) - \varphi^i(t) < 0$ lorsque $t_0 < t \leqslant t_0 + \varepsilon$ et $i = 1, \ldots, n$.

Supposons que pour un t

$$t_0 < t_0 + \varepsilon < t < a$$

le système d'inégalités (1,4) ne soit pas rempli et désignons par t_1 la borne inférieure de tels t. On aura

$$t_0 < t_0 + \varepsilon \leqslant t_1 < a$$
$$\psi^i(t_1) \leqslant \varphi^i(t_1), \quad (i = 1, \ldots, n)$$
$$\psi^i(t) < \varphi^i(t) \ [\text{pour } i = 1, \ldots, n \text{ et } t_0 < t < t_1] \qquad (1,5)$$

et, pour un certain indice $i = k$,

$$\psi^k(t_1) = \varphi^k(t_1)$$

Au moyen d'un raisonnement analogue au précédent on en conclut que $\bar{D}_- \psi^k(t_1) < \left(\frac{d\varphi^k}{dt}\right)_{t=t_1}$ et par suite, $\eta > 0$ étant suffisamment petit on aura, pour $t_1 - \eta \leqslant t < t_1$ l'inégalité $\psi^k(t) > \varphi^k(t)$ contrairement à (1,5).

La démonstration de la partie II du présent lemme est analogue.

Définition. Une intégrale $y^i = Y^i(t)$ d'un système d'équations différentielles

$$\dot{y}(t) = g^i(t_1\ y^1(t), \ldots, y^n(t)), \ (i = 1, \ldots, n) \qquad (1,6)$$

issue d'un point $(t_0, y_0^1, \ldots y_0^n)$ et définie dans un intervalle Δ contenant t_0, est dite *intégrale supérieure* relative à ce point et à cet intervalle lorsque pour chaque intégrale $y^i = y^i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ issue du même point et définie dans un intervalle Δ_1 (où $t_0 \in \Delta_1 \subset \Delta$)*) on a:

---

*) $t_0 \in \Delta_1$ désigne que t_0 est un élément de Δ_1 et $\Delta_1 \subset \Delta$ veut dire que Δ_1 fait partie de Δ.

$$y^i(t) \leqslant Y^i(t) \text{ lorsque } i=1,\ldots, n \text{ et } t \in \Delta_1$$

En remplaçant ce système d'inégalités par le système:

$$y^i(t) \geqslant Y^i(t) \text{ lorsque } i=1,\ldots n;\ t \in \Delta_1,$$

on obtient la définition de *l'intégrale inférieure relative au point* $(t_0, y_0^1, \ldots, y_0^n)$ et à l'intervalle Δ.

Remarque 1. Si dans chaque intervalle Δ_1 (où $t_0 \in \Delta_1 \subset \Delta$) le système (1,6) admet une intégrale unique passant par $(t_0, y_0^1, \ldots, y_0^n)$ alors cette intégrale unique constitue à la fois intégrale supérieure et inférieure relative à ce point et à Δ.

Si le système (1, 6) se réduit à une seule équation $\dot{y}^1(t) = g^1(t, y^1)$ dont le deuxième membre est défini et continu dans un ensemble ouvert Ω, alors*) par chaque point de Ω il passe une intégrale supérieure et une intégrale inférieure qui peuvent être prolongées à droite et à gauche de façon à tendre vers la frontière de Ω.

Dans le cas où $n \geqslant 2$ et les fonctions $g^i(t, y^1, \ldots, y^n)$ sont continues dans un ensemble ouvert Ω il peut arriver que, par un point $(t_0, y_0^1, \ldots, y_0^n)$ de Ω il ne passe aucune intégrale supérieure (ni inférieure) relative à ce point et à un intervalle Δ quel petit que soit Δ **).

Théorème I.***) Dans l'Hypothèse H il passe par tout point $(t_0, y_0^1, \ldots, y_0^n)$ de Ω une intégrale supérieure $\overline{J}$ (et une intégrale inférieure $\underline{J}$) du système (1, 2) relative à ce point et à un intervalle $t_0 \leqslant t < \alpha$. Le nombre α peut être choisi de façon qu'un point M variant sur $\overline{J}$ tend vers la frontière de Ω lorsque t tend vers α.

Démonstration. Choisissons $k > 0$ de façon que l'hypercube

$$|t - t_0| \leqslant k,\ |y^i - y_0^i| \leqslant k,\ (i=1,\ldots, n) \qquad (1,7)$$

---

*) E. Kamke. *Differentialgleichungen reeller Funktionen* (1930) p. 78. Ce livre sera cité dans la suite comme D. R. F.

**) E. Kamke. loc. cit. Acta Math. 58 (1932) p. 59.

***) Ce théorème correspondond au Satz 7 de M. Kamke (Acta Math. l. c. p. 79) qui nécessite une hypothèse accessoire.

soit contenu dans Ω et choisissons M de façon que l'on ait $|f^i|+1 \leqslant M$ pour les points de ce cube. Posons $h=\frac{k}{M}$

Le système S_ν

$$\dot{y}^i = f^i + \frac{1}{\nu}\,, \quad (i=1,\ldots, n) \tag{S_ν}$$

admet au moins une intégrale $\mathfrak{I}_\nu$

$$y^i = y^i_\nu\,(t)\,, \quad i=1,\ldots, n) \tag{$\mathfrak{I}_\nu$}$$

issue du point $(t_0, y_0^1, \ldots, y_0^n)$, définie pour

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h \tag{1,8}$$

et située dans le cube (1, 7). Soit

$$y^i = \sigma^i\,(t)\,, \quad (i=1,\ldots, n)$$

une intégrale quelconque du système (1, 2) issue du même point et définie dans l'intervalle (1, 8).*) On vérifie facilement qu'elle est située dans le cube (1, 7) et, à plus forte raison, dans Ω. On a dans l'intervalle (1, 8)

$$\dot{\sigma}^i\,(t) = f^i\,(t, \sigma_1\,(t), \ldots, \sigma_n\,(t)) < f^i\,(t, \sigma_1\,(t), \ldots, \sigma_n\,(t)) + \frac{1}{\nu+1}\,,$$

$$\dot{y}^i_{\nu+1}(t) = f^i\,(t, \overset{1}{y}_{\nu+1}(t), \ldots, \overset{n}{y}_{\nu+1}\,(t) + \frac{1}{\nu+1} <$$

$$< f^i\,(t, \overset{1}{y}_{\nu+1}\,(t) + \ldots) + \frac{1}{\nu}\,,$$

$$\dot{y}^i_\nu(t) = f^i\,(t, y^1_\nu\,(t), \ldots, y^n_\nu\,(t))$$

et par suite on a (cf. le lemme précédent)

$$\sigma^i\,(t) < y^i_{\nu+1}\,(t) < y^i_\nu\,(t)\,, \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h)\,.$$

La suite $y^i_\nu\,(t)$ est donc convergente vers une fonction $\tau^i(t)$ pour laquelle

$$\sigma^i\,(t) \leqslant \tau^i\,(t)\,, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h)\,. \tag{1,9}$$

La convergence étant uniforme [car en en raison de $|\dot{y}^i_\nu| = |f^i\,(t, y^1_\nu, \ldots)| \leqslant M$ les fonctions y^i_ν sont également continues dans (1, 8)] la courbe $y^i = \tau^i\,(t)$ constitue une intégrale du

*) Une telle intégrale existe cf. E. Kamke D. R. F. p. 128, Satz 4.

système (1, 2),**) elle passe par le point $(t_0, y_0^1, \ldots, y_0^n)$ et est renfermée dans le cube (1, 7). Elle constitue l'intégrale supérieure de (1, 2) relative au point $(t_0, y_0^1, \ldots, y_0^n)$ et à l'intervalle (1, 8) car les inégalités (1, 9) subsistent pour toutes les intégrales $y^i = \sigma^i(t)$ de (1, 2) issues du point $(t_0, y_0^1, \ldots, y_0^n)$. Par le procédé présenté dans le manuel de M. Kamke*) on peut prolonger l'intégrale supérieure du côté droit de t_0 de façon qu'elle tende vers la frontière de Ω.

La démonstration relative à l'intégrale inférieure est analogue.

Théorème 2. Admettons l'Hypothèse H. Supposons que les fonctions $\psi^i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ soient continues dans l'intervalle

$$t_0 \leqslant t < a \qquad (1, 10)$$

et que la courbe $y^i = \psi^i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ envisagée dans cet intervalle, soit englobée par Ω. Soient

$$A = (t_0, a_1, \ldots, a_n),\ B = (t_0, b_1, \ldots, b_n)$$

deux points de Ω pour lesquels on a

$$a_i \leqslant b_i,\ (i = 1, \ldots, n).$$

Dans cette hypothèse subsistent les propositions suivantes:

I) Si la courbe $y^i = \psi^i(t)$ passe par A et l'intégrale supérieure $y^i = \tau^i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ du système (1, 2) relative au point B existe dans l'intervalle (1,10) alors (par l'hypothèse même)

$$\psi^i(t_0) = a_i \leqslant b_i = \tau_i(t_0),\ (i = 1, \ldots, n) \qquad (1,10\,a)$$

et chacun séparément des systèmes de relations (1,11), (1.12), (1,12a) (avec $i = 1, \ldots, n$)

$$\underline{D}_+ \psi^i(t) \leqslant f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)) \text{ pour } t_0 < t < a \qquad (1,11)$$

$$\underline{D}_- \psi^i(t) \leqslant f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)) \text{ ,, ,, ,, } \qquad (1,12)$$

**) On le démontre en faisant tendre ν vers ∞ dans l'égalité $y_\nu^i(t) = \int_{t_0}^t \left[f^i t_0, y_\nu^1(\sigma), \ldots) + \frac{1}{\nu} \right] d\sigma + y_0^i$.

*) Kamke. *Differentialgleichungen reeller Funktionen* (Leipzig 1930 p. 135.

$$\frac{d\,\psi^i(t)}{dt} \leqslant f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)) \qquad (1,12\,a)$$

implique les inégalités *)

$$\psi^i(t) \leqslant \tau^i(t) \text{ pour } i = 1, \ldots, n;\ t_0 \leqslant t < \alpha \qquad (1,13)$$

II. Si la courbe $y^i = \psi^i(t)$ passe par B et l'intégrale inférieure du système (1, 2) $y^i = \eta^i(t)$ relative au point A existe dans l'intervalle (1,10) alors (par l'hypothèse même)

$$\eta^i(t_0) = a_i \leqslant b_i = \psi^i(t_0),\ (i = 1, \ldots, n) \qquad (1,14)$$

et chacun séparément des systèmes de relations (1,15), (1,16), (1,16 a)

$$\overline{D}_+ \psi^i(t) \geqslant f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)) \text{ pour } i = 1, \ldots, n;\ t_0 < t < \alpha \qquad (1,15)$$

$$\overline{D}_- \psi^i(t) \geqslant f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \qquad (1,16)$$

$$\frac{d\,\psi^i(t)}{d\,t} \geqslant f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)) \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \qquad (1,16\,a)$$

implique les inégalités

$$\psi^i(t) \geqslant \eta^i(t) \text{ pour } i = 1, \ldots, n;\ t_0 \leqslant t < \alpha \qquad (1,17)$$

Démonstration. Nous discuterons le cas de l'inégalité (1,11). Posons

$$F^i(t) = \psi^i(t) - \int_{t_0}^{t} f^i(s, \psi^1(s), \ldots, \psi^n(s))\, ds.$$

En vertu de (1,11) et de la continuité de $f^i(s, \psi^1(s), \ldots, \psi^n(s)$ on aura

$$\underline{D}_+ F^i(t) \leqslant 0 \text{ pour } t_0 < t < \alpha$$

La fonction $F^i(t)$ étant continue, il en résulte qu'elle est décroissante au sens large **) dans l'intervalle $t_0 < t < \alpha$ et, en raison de sa continuité, aussi dans l'intervalle $t_0 \leqslant t < \alpha$.

---

*) Les systèmes d'égalités (1,12a) et (1,16a) expriment que la courbe $y^i = \psi^i(t)$ est une intégrale du système (1,2).

**) Pour $\varepsilon > 0$ posons $G^i(\varepsilon, t) = F^i(t) - \varepsilon t$. On a $\overline{D}_+ G^i(\varepsilon, t) < 0$ lorsque $t_0 < t < \alpha$. Supposons que $t_0 < t_1 < t_2 < \alpha$ et $G^i(\varepsilon, t_1) < G^i(\varepsilon, t_2)$. Soit t_3 le maximum de t pour lesquels $t_1 \leqslant t \leqslant t_3, G^i(\varepsilon, t) = G^i(\varepsilon, t_1)$. On a $t_1 \leqslant t_3 < t_2, G^i(\varepsilon, t_1) = G^i(\varepsilon, t_3) < G^i(\varepsilon, t_2)$ et $G^i(\varepsilon, t_3) < G^i(\varepsilon, t)$ lorsque $t_3 < t < t_2$. De la il vient que $\overline{D}\, G^i(\varepsilon, t_3) \geqslant 0$, ce quí est impossible. On a donc $G^i(\varepsilon, t_1) \geqslant G^i(\varepsilon, t_2)$ lorsque $t_0 < t_1 < t_2 < \alpha$, d'où pour $\varepsilon \to 0$ on obtient $F^i(t_1) \geqslant F^i(t_2)$.

De là il résulte que $\overline{D}_+ F^i(t) \leqslant 0$ pour $t_0 < t < \alpha$.
Il s'ensuit que pour $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\overline{D}_+ \psi^i(t) < f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)) + \frac{1}{\nu} \text{ lorsque } t_0 \leqslant t < \alpha,$$

$$\overline{D}_- \psi^i(t) < f^i(t, \psi^1(t), \ldots, \psi^n(t) + \frac{1}{\nu} \text{ lorsque } t_0 < t < \alpha.$$

En gardant les notations de la démonstration du Théorème 1 on en conclut en vertu du Lemme 1, que

$$\psi^i(t) < y^i_\nu(t), \; (t_0 < t \leqslant t_0 + h)$$

et en passant à la limite $\nu \to +\infty$

$$\psi^i(t) \leqslant \tau^i(t), \; (t_0 < t < t_0 + h).$$

Ces inégalités subsistent aussi pour $t_0 < t < \alpha$.
Dans le cas contraire, en désignant par t_1 la borne inférieure des t

$$t_0 + h < t < \alpha$$

pour lesquels ces inégalités ne subsisteraient pas à la fois on aurait

$$\psi^i(t_1) \leqslant \tau^i(t_1), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

En appliquant au point t_1 le raisonnement appliqué tout à l'heure au point t on aboutirait à la conclusion que les inégalités en question subsisteraient dans un intervalle $t_1 \leqslant t_1 + h_1$, $(h_1 > 0)$ contrairement à la définition de t_1.

Le cas des inégalités (1,12) et la partie II du présent théorème peuvent être établis dans une voie pareille.

Du théorème précédent résulte immédiatement le suivant corollaire.

Corollaire 1. Admettons l'Hypothèse H et soient $A = (t_0, a_1, \ldots, a_n)$, $B = (t_0, b_1, \ldots, b_n)$ deux points de Ω pour lesquels $a_i \leqslant b_i$, $(i = 1, \ldots, n)$. Cela posé on a les propriétés suivantes I, II et III.

I). A chaque intégrale $y^i = \psi^i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ issue de A (du système 1,2) corespond au moins une intégrale $y^i = \tau^i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ du même système passant par B

(et notamment l'intégrale supérieure), telle que pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on a

$$\psi^i(t) \leqslant \tau^i(t) \quad \text{lorsque} \quad t_0 \leqslant t < t_0 + \varepsilon.$$

II). A chaque intégrale du même système $y^i = \psi^i(t)$ qui passe par B correspond au moins une intégrale du même système (l'intégrale inférieure) $y^i = \eta^i(t)$ qui pour un petit $\varepsilon > 0$ remplit les inégalités $\eta^i(t) \leqslant \psi^i(t)$ pour $t_0 \leqslant t < t_0 + \varepsilon$.

III). Si par chaque point de Ω il passe une intégrale unique du système (1,2) et $y^i = \psi^i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$; $y^i = \tau^i(t)$ désignent les intégrales passant respectivement par A et B, alors $\psi^i(t) \leqslant \tau^i(t)$ dans tout intervalle $t_0 < t < \alpha$ dans lequel ces intégrales existent simultanément.

§ 2. La nécessité de l'Hypothèse K pour la vérité des théorèmes sur les inégalités diférentielles du paragraphe précédent.

Il se pose le problème de savoir dans quelle mesure l'Hypothèse K est essentielle pour le vérité du Théorème 2.

Or l'exemple présenté plus tard (cf. p. 131) montre que l'Hypothèse K n'est pas suffisante à cet effet lorsque l'ensemble ne jouit pas de la Propriété P (cf. p. 119).

En adoptant la Propriété P et l'Hypothèse K (au lieu de H) nous déduirons du Théorème 2 le théorème qui suit. Ce théorème n'utilisera pas la notion des intégrales supérieure et inférieure (dont l'existence a été prouvée sous l'Hypothèse H ou bien sous l'Hypothèse K associée de la Propriété P). On obtiendra ainsi une légère modification du Théorème 2 pour laquelle on prouvera ensuite la nécessité de l'Hypothèse K.

Théorème 2 a. Supposons que la section de l'ensemble ouvert Ω par un plan quelconque $t = c$ représente un parallélépipède

$$-\infty \leqslant \alpha(c) < y^i < \beta(c) \leqslant +\infty \tag{2,1}$$

(ou plus généralement adoptons la Propriété P (cf. p. 119)).

Adoptons relativement aux fonctions f^i (cf. 1,2) l'Hypothèse K. Soient $A = (t_0, a_1, \ldots, a_n)$, $B = (t_0, b_1, \ldots, b_n)$ deux points de Ω pour lesquels on a: $a_i \leqslant b_i$, $(i = 1, \ldots, n)$. Dans cette hypothèse subsistent les propositions suivantes.

I. Si une courbe continue $y^i = \psi^i(t)$, $(i=1, \ldots, n)$ faisant partie de Ω passe par A et remplit un des trois systèmes de relations (1,11), (1,12), (1,12a) alors il existe une intégrale $y^i = \tau^i(t)$, $(i=1, \ldots, n)$ du système (1,2) qui passe par B et remplit les inégalités (1,13) dans un intervalle $t_0 \leqslant t < t_0 + \varepsilon$ (pour un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit).

II. Si une courbe continue $y^i = \psi^i(t)$ englobée par Ω passe par B et remplit un des trois systèmes de relations (1,15), (1,16), (1,16a) alors il existe une intégrale $y^i = \eta^i(t)$ du système (1,2) qui passe par A et remplit les inégalités (1,17) dans un intervalle suffisamment petit $t_0 \leqslant t < t_0 + \varepsilon$.

Démonstration. L'ensemble Ω jouit, par l'hypothèse, de la Propriété P. L'Hypothèse K entraîne donc l'Hypothèse H (cf. Proposition 1). Le présent théorème résulte, par conséquent, immédiatement du Théorème 2.

Avant de prouver que l'Hypothèse K est essentielle pour la vérité du Théorème 2a nous établirons le suivant

Lemme 2. Admettons les hypothèses suivantes:

1⁰) Les fonctions f^i figurant dans le système (1,2) sont continues dans un ensemble ouvert Ω.

2⁰) Si

$$A = (t_0, a_1, \ldots, a_n), \quad B = (t_0, b_1, \ldots, b_n)$$

sont deux points de Ω pour lesquels

$$a_i \leqslant b_i, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2,2}$$

et si $y^i = \psi^i(t)$ est une intégrale du système (1,2) passant par A, alors il existe une intégrale du même système $y^i = \tau^i(t)$, $(i = 1, \ldots, n)$ qui passe par B et satisfait aux inégalités

$$\psi^i(t) \leqslant \tau^i(t) \text{ pour } i = 1, \ldots, n \text{ et } t_0 \leqslant t < t_0 + \varepsilon \tag{2,3}$$

(où $\varepsilon > 0$ est un nombre suffisamment petit)*).

Ceci étant admit nous affirmons que

a) les fonctions f^i satisfont à l'Hypothèse K, c-à-d. la fonc

*) Le présent lemme reste vrai lorsque l'on remplace l'hypothèse 2⁰ par la suivante hypothèse 2 bis: Si les points A et B appartiennent à Ω et remplissent les inégalités (2,2) alors à chaque intégrale du système (1,2) issue de B correspond une intégrale de ce système qui passe par A et remplit les inégalités (2.3).

tion f^i, $(i=1,\ldots,n)$ est une fonction croissante (au sens large) de chacune de variables $y^1,\ldots, y^{i-1}, y^{i+1},\ldots, y^n$ séparément;

β) dans le cas où l'ensemble Ω jouit de la Propriété P (cf. p. 119)*) les fonctions f^i remplissent dans Ω l'Hypothèse H du § 1.

Démonstration. Supposons que les points

$$P=(t_0,\, c_1,\ldots,\, c_{j-1},\, p_j,\, c_{j+1},\ldots,\, c_n)$$
$$Q=(t_0,\, c_1,\ldots,\, c_{j-1},\, q_j,\, c_{j+1},\ldots,\, c_n)$$

appartiennent à Ω et que $p_j < q_j$. Afin d'établir la partie α) du présent lemme il suffit de prouver que

$$f^i(P) \leqslant f^i(Q) \quad \text{pour } i\neq j \tag{2, 4}$$

Soit $y^k=\psi^k(t)$, $(k=1,\ldots, n)$, une intégrale du système (1, 2) issue du point P. En vertu de la prémisse 2⁰ du présent lemme il existe une intégrale $y^k=\tau^k(t)$ issue de point Q qui satisfait aux inégalités (2, 3).

On a

$$\psi^i(t_0) = \tau^i(t_0) = c_i \text{ pour } i\neq j.$$

En rapprochant ces égalités des inégalités (2, 3) on obtient

$$\frac{\psi^i(t)-\psi^i(t)_0}{t-t_0} \leqslant \frac{\tau^i(t)-\tau^i(t_0)}{t-t_0}, \quad (i\neq j,\ t_0<t<t_0+\varepsilon)$$

d'où à la limite $\dot{\psi}^i(t_0) \leqslant \dot{\tau}^i(t_0)$, $(i\neq j)$. En remarquant que $\dot{\psi}^i(t_0)=f^i(P)$, $\dot{\tau}^i(t_0) = f^i(Q)$ on en déduit les inégalites (2,4).

La partie β) du présent lemme résulte de la partie α) en vertu de la Proposition 1 du § 1.

Théorème 3. Supposons que la section de l'ensemble ouvert Ω par un plan quelconque $t=c$ représente un parallélépipède de la forme (2, 1) ou plus généralement supposons que l'ensemble Ω jouisse de la Propriété P (cf. p. 119).

*) L'ensemble Ω jouit de la Propriété P par exemple dans le cas où la section de Ω par un plan quelconque $t=c$ constitue un parallélépipède de la forme (2,1).

Ceci étant admis chacune des Hypothèses H et K du § 1 est nécessaire pour chacune de six parties du Théorème 2*a*. *)

Démonstration. La nécessité des Hypothèses H et K pour la vérité de cette partie du Théorème 2*a* qui se rapporte au système des relations (1, 12*a*) a été établie dans le lemme précédent.

Or la vérité de la partie de ce théorème qui se rapporte à (1, 11) (ou 1, 12) a pour coséquence la vérité de sa partie relative à (1, 12*a*). Il en résulte que chacune des Hypothèses H et K constitue une condition nécessaire pour les parties du Théorème 2*a* qui se rapportent aux systèmes des relations (1, 11) et (1, 12). — La nécessité pour les parties relatives à (1,15), (1, 16) et (1, 16*a*) s'établit d'une façon analogue.

§ 3. L'insuffisance de l'Hypothèse *K* pour la prolongeabilité de l'intégrale supérieure à droite jusqu' à la frontière du domaine.

Proposition 3. Si le système (1,2) remplit l'Hypothèse K dans un ensemble ouvert Ω alors par chaque point $A=(t_0, a_1, \ldots, a_n)$ de Ω il passe une intégrale supérieure à droite valable dans un intervalle $t_0 \leqslant t < t_0+\varepsilon$, pourvu que $\varepsilon > 0$ soit un nombre *suffisamment petit*.

Autrement dit, l'Hypothèse K assure *l'existence locale de l'intégrale supérieure à droite.*

Démonstration. Soit $|t-t_0| < h$, $|y^i - a_i| < h$, $(i=1,\ldots,n)$ un cube contenu dans Ω. Ce cube jouit de de la Propriété P du § 1. Le système (1,2) remplit donc, dans ce cube, l'Hypothèse H (cf. Proposition 1). Il existe, par conséquent, l'intégrale supérieure à droite du système (1,2) issue de A et pouvant être prolongée jusqu'à la frontière de ce cube (cf Théorème 1).

---

*) Il s'agit de six parties du Théorème 2*a* qui se rapportent respectivement aux systèmes de relations (1,11), (1,12). (1.12a), (1,15), (1,16) et (1.16a).

Proposition 4. Si le système (1,2) remplit dans Ω l'Hypothèse K alors par chaque point $A=(t_0, a_1, \ldots, a_n)$ de Ω il passe une intégrale $y^i=\tau^i(t)$, $(i=1, \ldots, n)$ définie dans un intervalle $t_0 \leqslant t < b < +\infty$ jouissant des propriétés suivantes: 1[0]) elle tend vers la frontière de Ω lorsque t tend vers b;
2[0]) si $t_0 \leqslant t_1 < b \leqslant +\infty$ alors elle constitue l'intégrale supérieure à droite du système (1,2) issue du point $(t_1, \tau_1(t_1), \ldots, \tau_n(t_1))$ relative à un intervalle $t_1 \leqslant t < t_1 + \varepsilon(t_1)$ où $\varepsilon(t_1) > 0$ désigne un nombre suffisamment petit.

Ceci résulte immédiatement de la Proposition 3 et d'un théorème bien connu sur la possibilité du prolongement d'une intégrale jusqu'à la frontière de Ω.

Remarque 1 a. Il peut arriver (voir Exemple qui suit) que cette intégrale $y^i = \tau^i(t)$ n'est pas une intégrale supérieure à droite du système (1,2) relativement au point de départ A et à un intervalle $t_0 \leqslant t < c \leqslant b$. Il se peut bien qu'il existe une autre intégrale $y^i = \eta^i(t)$, $i=1, \ldots, n)$ issue de A qui existe dans l'intervalle $t_0 \leqslant t < c$ et qui ne remplit pas les inégalités $\eta_i(t) \leqslant \tau_i(t)$, $(i=1, \ldots, n)$ pour un $t_2 (t_0 < t_2 < c)$ suffisamment éloigné de t_0.

Exemple Nous allons construire un exemple d'un système de trois*) équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2. y_3), \quad (i=1, 2, 3) \tag{3,1}$$

vérifiant l'Hypothèse K dans un ensemble ouvert Ω pour lequel il n'existe aucune intégrale supérieure à droite issue d'un certain point et tendant vers la frontière de Ω lorsque t tend en croissant vers une certaine limite**).

---

*) Un exemple analogue pour un système de deux équations est impossible en vertu de la Proposition 2 du § 1.

**) Le rôle de cet exemple dans la théorie qui nous occupe devient plus clair lorsque l'on tient compte des Propositions 3 et 4 et de la Remarque 1 a du présent paragraphe.

Il en résulte que ni le Théorème 1 ni le Théorème 2 ne sont pas vrais lorsque l'on y remplace l'Hypothèse H par l'Hypothèse K.

I. Posons

$$w(t) = 3\sqrt{2}\, t^2 (3-2t). \tag{3,2}$$

On a

$$w'(t) = 18\sqrt{2}\, t(1-t^2) \tag{3,3}$$

$$w(0) = 0, \quad w(1) = 3\sqrt{2}, \quad w'(0) = 0, \quad w'(1) = 0, \tag{3,4}$$

$$w(t) > 0, \quad w'(t) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < t < 1. \tag{3,5}$$

II. Considérons sur le plan des variables t, z les trois familles F_1, F_2, F_3 des courbes définies dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ et dépendant respectivement des paramètres α, β et γ

$$z = \alpha, \quad (-\infty < \alpha \leqslant 0) \qquad (\textit{famille } F_1)$$

$$z = \beta\, w(t), \quad (0 \leqslant \beta \leqslant 1) \qquad (\textit{famille } F_2)$$

$$z = w(t) + \gamma, \quad (0 < \gamma < +\infty) \qquad (\textit{famille } F_3)$$

et reunissons ces familles en une seule famille $F = F_1 + F_2 + F_3$. On voit facilement que deux courbes de cette famille ayant un point commun P ont la même tangente au point P. Il est ainsi clair que par chaque point de la bande

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad -\infty < z < +\infty \tag{3,6}$$

il passe au moins une courbe de la famille F. Les courbes de la famille F constituent donc les intégrales d'une équation différentielle

$$\frac{dz}{dt} = h(t, z) \tag{3,7}$$

La fonction $h(t, z)$ est définie de la façon suivante:

$$h(t,z) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad z \leqslant 0 \tag{3,8}$$

$$h(t,z) \equiv \frac{w'(t)}{w(t)} \text{ pour } 0 < t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant w(t), \tag{3,9}$$

$$h(t,z) = w'(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad z > w(t). \tag{3,10}$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes p_1, p_2, p_3 et p_4.

p_1) $h(t,z)$ est continue dans la bande (3,6).

p_2) $h(0,z) \equiv h(1, z) \equiv 0$ pour $-\infty < z < +\infty$,

p_3) $h(t,z)$ est croissante au sens large relativement à z (cf. (3,8), (3,9), (3,10) et (3,6)).

p_4) Les courbes de la famille F_2 constituent toutes les intégrales de l'équation (3,7) issues du point $t=0$, $z=0$. L'intégrale inférieure de (3,7) issue de l'origine est donc $z\equiv 0$ et l'intégrale supérieure $z=w(t)$. Ces intégrales existent dans l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$.

III. Considérons maintenant le système des équations différentielles

$$z'=h(t,z), v'=0, \tag{3,11}$$

dont les deuxièmes membres sont définies dans l'ensemble $0\leqslant t\leqslant 1$, $-\infty<z+\infty$, $-\infty<v<+\infty$.

p_5) En vertu de la propriété p_4 les courbes dépendant du paramètre β

$$z=\beta w(t), \quad v=0, \quad (0\leqslant\beta\leqslant 1)$$

constituent toutes les intégrales du système (3,11) issues de l'origine $t=z=v=0$.

IV. Nous assujettirons maintenant le système (3, 11) à la transformation

$$\left.\begin{aligned} z&=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1+y_2),\\ v&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1+y_2). \end{aligned}\right\}\text{ c.-à-d. }\left\{\begin{aligned} y_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}(z-v),\\ y_2&=\frac{1}{\sqrt{2}}(z+v). \end{aligned}\right.$$

Le système (3, 11) passera ainsi en système

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt}&=\frac{1}{\sqrt{2}}h\Big(t,\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\Big)\\ \frac{dy_2}{dt}&=\frac{1}{\sqrt{2}}h\Big(t,\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2\Big) \end{aligned}\right\} \tag{3, 12}$$

dont les deuxièmes membres sont définis dans la bande

$$0\leqslant t\leqslant 1, -\infty<y_i<+\infty, (i=1,2).$$

y sont continues et croissant au sens large par rapport à chacune des variables y_1 et y_2 séparément (cf. p_3).

p_6) En vertu de p_5 les courbes de la famille suivante dépendant du paramètre β

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta w(t), y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta w(t), \ (0 \leqslant \beta \leqslant 1)$$

présentent la totalité des intégrales du système (3, 12) issues de l'origine $t = y_1 = y_2 = 0$.

V. Considérons maintenant quatre ensembles Ω_i, $(i=1,2,3,4)$ définis respectivement par les relations suivantes:

$-\infty < t < 0, \ -\infty < y_i < +\infty, \quad (i = 1, 2, 3,)$ (*ensemble* Ω_1)

$0 \leqslant t < 1, \ -\infty < y_i < +\infty, \quad (i = 1, 2, 3)$ (*ensemble* Ω_2)

$1 \leqslant t < +\infty, \ y_1^2 + y_2^2 < 1, \ -\infty < y_3 < +\infty$ (*ensemble* Ω_3)

$1 \leqslant t < +\infty, \ (y_1 - 3)^2 + (y_2 - 3)^2 < 1, \ -\infty < y < +\infty$. (*ensemble* Ω_4)

et posons

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4.$$

L'ensemble Ω est évidemment ouvert. Nous définirons maintenant dans Ω le système d'équations differentielles (3, 1) de la façon suivante. Nous posons

$f_i(t, y_1, y_2, y_3) \equiv 0, \ (i = 1, 2, 3)$ dans Ω_1 (3,13)

$f_1 \equiv f_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} h(t, \frac{1}{\sqrt{2}} y_1, + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2), \ f_3 \equiv 0$ dans Ω_2, (3,14)

$f_1 \equiv f_2 \equiv f_3 \equiv 0$ dans Ω_3, (3,15)

$f_1 \equiv f_2 \equiv 0, \ f_3 = 1 - t$ dans Ω_4 (3,16)

Or il est évident que les fonctions f_1, f_2, f_3 sont continues en tout point (t, y_1, y_2, y_3) de Ω pour lequel $t \neq 0$ et $t \neq 1$. La continuité des f_i dans le cas où $t = 0$ ou bien $t = 1$ résulte de la propriété p_2.

VI. Nous allons démontrer que le système (3, 1) remplit dans Ω l'Hypothèse K du § 1. Nous démontrerons que chaque fonction f_i, $(t = 1, 2, 3)$ est croissante aus sens large relativement à chacune des variables y_1, y_2, y_3.

C'est évident pour $t < 0$ (cf. 3, 13). C'est une conséquence de (3, 14), p_3 et (3, 4) pour $0 \leqslant t < 1$. Il reste le cas $t \geqslant 1$. Soient $P = (t, y_1, y_2, y_3)$ et $\bar{P} = (t, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ deux points de Ω pour lesquels $t \geqslant 1$, $y_\alpha < \bar{y}_\alpha$ (pour un certain indice α), tandis que $y = \bar{y}_i$ lorsque $i \neq \alpha$. Les points P et $\bar{P}$ appartiennent évidemment à $\Omega_3 + \Omega_4$. On démontre faci-

lement en raison de la definition de Ω_3 et Ω_4 que les points P et $\bar{P}$ appartiennent ou bien à la fois à Ω_3 ou bien ils appartiennent tous les deux à Ω_4. Dans chacun de ces cas on voit en vertu de (3,15) et (3,16), que $f_i(P) = f_i(P)$. La croissance en question des fonctions f_i se trouve ainsi démontrée.

VII. Soit

$$y_i = \tau_i(t), \; (i = 1, 2, 3) \tag{3,17}$$

une intégrale quelconque du système (3,1) issue du point

$$t = y_1 = y_2 = y_3 = 0 \tag{3,18}$$

qui tend vers la frontière de Ω lorsque t croît. Soit

$$0 \leqslant t < a \tag{3,19}$$

son maximal intervalle d'existence. *) Nous prouverons que intégrale (3,17) ne peut pas être intégrale supérieure à droite *relativement au point initial* (3,18) *et à l'intervalle* (3,19). **)

Supposons que (3,17) soit intégrale supérieure à droite du système (3,1) relative au point initial (3,18) et à l'intervalle (3,19). Soit

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{3,20}$$

En vertu de (3,14), p_6 et (3,4) la courbe

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, w(t), \; y_3 \equiv 0, \; (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

constitue l'intégrale supérieure à droite du système (3,1) relative au point initial (3,18) et à l'intervalle (3,20). Deux intégrales d'une telle sorte étant identiques on a

$$\tau_1(t) \equiv \tau_2(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\, w(t), \; \tau_3(t) \equiv 0 \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

---

*) Si t tend en croissant vers a, l'intégrale (3 17) tend vers la frontière de Ω.

**) (3,17) étant une intégrale quelconque du système (3.1) issue du point (3,18) et tendant vers la frontière de Ω, nous prouverons en même temps qu'il n'existe pas une intégrale supérieure à droite issue de (3.18) et tendant vers la frontière de Ω.

En vertu de (3,4) il s'ensuit que

$$\tau_1(1) = \tau_2(1) = 3, \; \tau_3(1) = 0.$$

L'intégrale (3,17) passe donc par le point

$$t = 1, \; y_1 = 3, \; y_2 = 3, \; y_3 = 0.$$

Ce point appartient à Ω_4. En raison de (3,16) on aura donc

$$\tau_1(t) = \tau_2(t) = 3, \; \tau_3(t) = -\frac{1}{2}(t-1)^2 \text{ pour } 1 \leqslant t < 1+\varepsilon$$

lorsque $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit,

On aura, en particulier,

$$\tau_3(t) < 0 \text{ pour } 1 < t < 1 + \varepsilon, \qquad (3,21)$$

En vertu de (3,14), p_6, (3.4) et (3,15)

la courbe

$$y = \eta_i(t) \equiv 0, \; (i = 1, 2, 3), \; (0 \leqslant t < +\infty)$$

constitue une intégrale du systèmé (3,1) issue du point (3,18). En raison de (3,21) on aura

$$\tau_3(t) < \eta_3(t) \text{ pour } 1 < t < 1 + \varepsilon,$$

ce qui prouve que l'intégrale (3,17) ne peut pas être intêgrale supérieure à droite du système (3,1) relativement au point initial (3,18) et à l'intervalle $0 \leqslant t < 1+\varepsilon$, ni, à plus forte raison, relativement à l'intervalle (3,19). Nous avons ainsi abouti à une contradiction.

§ 4. Cas des systèmes d'équations différentielles aux deuxièmes membres décroissants.

Les considértions des paragraphes précédents se rapportaient aux systèmes d'équations differentielles (1,2) où les fonctions $f^i(t, y^1, \ldots, y^n)$ étaient *croissantes* dans le sens precisé par les Hypothèses *H* ou *K* du § 1.

Or au moyen de la transformation des variables

$$y^i = x^i, (i = 1, \ldots, n), \quad t = -s \qquad (4,1)$$

on peut déduire des propositions acquises précédement les résultats tout-à-fait analogues. Ces résultats se rapporteront aux systèmes d'équations différentielles qui diffèrent du

système (1,2) par ce que ses deuxièmes membres sont *décroissants* au sens précisé par les hypothèses qui suivent.

Les systèmes d'équations différentielles envisagés dans le présent paragraphe auront la forme

$$\dot{x}^i(s) = F^i(s, x^1, \ldots, x^n),\ (i=1,\ldots,n)^*) \tag{4,2}$$

Hypothèse H bis. 1° Les fonctions

$$F^i(s, x^1, \ldots, x^n),\ (i=1,\ldots,n) \tag{4,3}$$

sont continues dans un ensemble ouvert Ω des points $(s, x^1, \ldots, x^n)$ 2°) Si pour un i quelconque $(i=1,\ldots,n)$, les points

$$A = (s, a_1, \ldots, a_{i-} \ c, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$
$$B = (s, b_1, \ldots, b_{i-1} \ c, b_{i+1}, \ldots, b_n)$$

appartiennent à Ω et

$$a_\nu \leqslant b_\nu,\ (\nu = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$$

alors

$$F^i(A_i) \geqslant F^i(B_i)\ .$$

Hypothèse K bis 1°) La fonction F^i $(i=1,\ldots,n)$ (cf. 4,3) est continue dans un ensemble ouvert Ω. 2°) Elle est une fonction décroissante (au sens large) de chacune des variables $x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots. x^n$ séparément.**)

Les deux hypothèses précédentes ne sont pas équivalentes pour tous les ensembles ouverts Ω. On a sur ce sujet la suivante:

Proposition 1 bis. Pour tout ensemble Ω jouissant de la Propriété P du § 1 les Hypothèses H bis et K bis sont équivalentes.

Voici maintenant les remarques permettant de déduire immédiatement des résultats des § § 1 — 3 les résultats

---

*) Nous écrivons out court $\dot{x}(s)$ au lieu de $\dfrac{dx^i(s)}{ds}$.

**) C.-à-d. $F^i(s, x^1, \ldots, x^{j-1}. k^j, x^{j+1}, \ldots x^n \geqslant$
$\geqslant F^i(s, x^1, \ldots, x^{j-1}. l^j\ x^{j+1}, \ldots x^n)$ lorsque $i \neq j$ et $k^j \leqslant l$ ·
On ne suppose pas que F^i soit décroissante relativement à x^i et à s.

analogues mais relatifs au système d'équations différentielles (4,2) et aux Hypothèses *H bis* et *K bis*.

α) Soit $p(s)$ une fonction définie au voisinage de $s = s_0$ et posons $\psi(t) = p(-t)$, $t_0 = -s_0$.

Les nombres dérivés des fonctions ψ et p sont reliés par les relations

$$\overline{D}_{(+)}\psi(t_0) = -\underline{D}_{(-)}p(s_0), \quad \underline{D}_{(+)}\psi(t_0) = -\overline{D}_{(-)}p(s_0),$$

$$\overline{D}_{(-)}\psi(t_0) = -\underline{D}_{(+)}p(s_0), \quad \underline{D}_{(-)}\psi(t_0) = -\overline{D}_{(+)}p(s_0).$$

β) Appliquons au système (4,2) la transformation (4,1). Nous obtiendrons le système

$$\frac{dy^i}{dt} = -F^i(-t, y^1, \ldots, v^n), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ou bien en posant

$$f^i(t, y^1, \ldots, y^n) = -F^i(-t, y^1, \ldots, y^n)$$

le système

$$\frac{dy^i}{dt} = f^i(t, y^1, \ldots, y), \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (4,4)$$

γ) Soit Ω_1 un ensemble de points $(t, y^1, \ldots, y^n)$ constituant l'image de Ω par l'intermédiare de la transformation (4,1). Cela posé les ensembles Ω et Ω_1 ne peuvent être ouverts qu'à la fois et ne peuvent que simultanément jouir de la Propriété *P* du § 1.

δ) La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions $F^i(s, x^1, \ldots, x^n)$ remplissent dans Ω l'Hypothèse *H bis* (ou *K bis*) consiste en ce que les fonctions $f^i(t, y^1, \ldots, y^n)$ remplissent dans Ω_1 l'Hypothèse *H* (ou *K*).

ε) Si $y^i = y^i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ est une intégrale supérieure (ou inférieure) du système (4,4) relative au point $(t_0, a_1, \ldots, a_n)$ et à l'intervalle $t_0 \leqslant t < \alpha$ alors la courbe $x = x^i(s) = y^i(-s)$, $(i = 1, \ldots, n)$ constitue une intégrale inférieure (ou supérieure) du système (4,2) relative au point $(-t_0, a_1, \ldots, a_n)$ et à l'intervalle $-\alpha < s \leqslant s_0 = -t_0$.

Thèorème 1 bis. Dans l'Hypothèse *H* bis il passe par tout $(s_0, x_0^1, \ldots, x_0^n)$ de Ω une intégrale supérieure $\overline{J}$ et une

intégrale inférieure $\underline{\mathfrak{I}}$ du système (4,2) relative à ce point et à un intervalle $\alpha \leqslant s \leqslant s_0$, Le nombre α peut être choisi de façon qu'un point M variant sur $\overline{\mathfrak{I}}$ tende vers la frontière de Ω lorsque s tend vers α.

Théorème 2 bis. Admettons L'Hypothèse *H bis*. Supposons que les fonctions $\psi^i(s)$, $(i=1, \ldots, n)$ soient continues dans l'intervalle

$$\alpha < s \leqslant s_0 \tag{4,5}$$

et que la courbe $x^i = \psi^i(s)$, $(i=1, \ldots, n)$ envisagée dans cet intervalle soit englobée par Ω. Soient

$$A=(s_0, a_1, \ldots, a_n), \quad B=(s_0, b_1, \ldots, b_n)$$

deux points de Ω pour lesquels on a

$$a_i \leqslant b_i \quad (i=1, \ldots, n)$$

Dans cette hypothèse subsistent les propositions suivantes:

I). Si la courbe $x^i(s) = \psi^i(s)$ passe par A et l'intégrale supérieure $\tau^i(s)$ existe dans l'intervalle (4,5) alors chacun séparément des systèmes de relations (4,6), (4,7), (4,8) $(i=1, \ldots, n)$

$$\overline{D}_{(+)}\psi^i(s) \geqslant F^i(s, \psi^1(s), \ldots, \psi^n(s)) \text{ pour } \alpha < s < s_0 \tag{4,6}$$

$$\overline{D}_{(-)}\psi^i(s) \geqslant F^i(s, \psi^1(s), \ldots, \psi^n(\lambda)) \quad \text{,, ,, ,,} \tag{4,7}$$

$$\frac{d\,\psi^i(s)}{ds} \geqslant F^i(s, \psi^1(s), \ldots, \psi^n(s)) \tag{4,8}$$

implique les inégalités*)

$$\psi^i(s) \leqslant \tau^i(s) \text{ pour } i=1, \ldots, n; \quad \alpha < s \leqslant s_0 \tag{4,9}$$

II). Si la courbe $x^i = \psi^i(s)$ passe par B et l'intégrale inférieure du système (4,4) $x^i = \eta^i(s)$ relative au point A existe dans l'intervalle (4,5), alors chacun séparément des systèmes de relations (4,10), (4,11), (4,12)

$$\underline{D}_{(+)}\psi^i(s) \leqslant F^i(s, \psi^1(s) \ldots, \psi^n(s)) \text{ pour } i=1, \ldots, n; \alpha < s < s_0 \tag{4,10}$$

$$\underline{D}_{(-)}\psi^i(s) \leqslant F^i(s, \psi^1(s), \ldots, \psi^n(s)) \quad \text{,, ,, ,,} \tag{4,11}$$

$$\frac{d\,\psi^i(s)}{ds} \leqslant F^i(s, \psi^1(s), \ldots, \psi^n(s)) \quad \text{,, ,, ,,} \tag{4,12}$$

---

*) Les systèmes d'égalités (4,8) et (4,12) expriment que la courbe $x^i = \psi^i(s)$, $(i = 1, \ldots, n)$ est une intégrale du système (4,4).

implique les inégalités

$$\psi^i(s) \geqslant \eta^i(s) \text{ pour } i = 1, \ldots, n;\ \alpha < s \leqslant s_0. \qquad (4{,}13).$$

Lemme 2 bis. Admettons les hypothèses suivantes:

1⁰) Les fonctions F^i figurant dans le système (4,2) sont continues dans un ensemble ouvert Ω.

2⁰) Si

$$A = (s_0, a_1, \ldots, a_n),\ B = (s_0, b_1, \ldots, b_n)$$

sont deux points de Ω pour lesquels

$$a_i \leqslant b_i,\ (i = 1, \ldots, n)$$

et si $x^i = \psi^i(s)$, $(i = 1) \ldots, n)$ est une intégrale du système (4,2) passant par A, alors il existe une intégrale du même système $x^i = \tau^i(s)$ qui passe par B et satisfait aux inégalités $\psi^i(s) \leqslant \tau^i(s)$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $s_0 - \varepsilon < s < s_0$ (où $\varepsilon > 0$ est un nombre suffisamment petit). *)

Ceçi étant admis nous affirmons que

α) les fonctions F^i satisfont à l'Hypothèse *K bis* c.-à-d. la fonction F^i, $(i = 1, \ldots, n)$ est fonction décroissante (au sens large) de chacune de variables $x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n$ séparément.

β) dans le cas où l'ensemble Ω jouit de la Propriété P (cf.p. 119), les fonctions F^i remplissent dans Ω l'Hypothèse *H bis*.

Nous nous dispensons d'énoncer les

Théorème 2a bis et *Théorème 3 bis*

qui resultent respectivement du Théorème 3 par l'intermédiaire de la transformation (4,1).

§ 5. Systèmes d'équations différentieles dont l'intégrale supérieure (ou inférieure) bilatérale croît avec la position de son point initial.

Définition I. Nous dirons que le point $D = (t_2, d_1, \ldots, d_n)$

---

*) Le présent lemme reste vrai lorsque l'on remplace l'hypothèse 2⁰ par l'hypothèse suivante: Si A et B appartiennent à Ω et remplissent les inégalités $a_i \leqslant b_i$ alors à chaque intégrale $x^i = \tau^i(s)$ du système (4,2) issue de B correspond une intégrale de ce système $x^i = \psi^i(s)$ qui passe par A et telle que $\psi^i(s) \leqslant \tau^i(s)$ lorsque $i = 1, \ldots, n$ et $s_0 - \varepsilon < s \leqslant s_0$ (où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit).

majore le point $C=(t_1, c_1, \ldots, c_n)$ et nous écrirons $D \geqslant C$ lorsque $t_1=t_2$ et $d_i \geqslant c_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Si $D \geqslant C$ nous dirons aussi que C minore D et nous écrirons $C \leqslant D$.

Définition II. Soit $x^i=\psi^i(t)$, $(i=1, \ldots, n)$ une courbe quelconque. Désignons par X et $\Phi(t)$ les points dont les cordonnées sont respectivement $(x^1, \ldots, x^n)$ et $\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)$. Le symbole $\Phi(t)$ désigne ainsi une fonction subordonnant à la variable numérique t le point $(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$.

Soit $x^i=\psi^i(t)$, $(i, \ldots, n)$ une autre courbe que nous écrirons sous la forme $X=\Psi(t)$.

Nous dirons que la courbe $X=\Psi(t)$ majore $X=\Phi(t)$ dans un intervalle Δ lorsque $\varphi^i(t) \leqslant \psi^i(t)$ pour les valeurs de t appartenant à Δ. Dans ce cas nous dirons que $\Psi(t)$ majore $\Phi(t)$ (ou $\Phi(t)$ minore $\Psi(t)$ dans Δ et nous écrirons: $\Phi(t) \leqslant \Psi(t)$ dans Δ, ou bien $\Psi(t) \geqslant \Phi(t)$ dans Δ*)

Théorème 4. Soit

$$\frac{dy^i}{dt}=f^i(t, y^1, \ldots, y^n), \quad (i=1, \ldots, n) \tag{5,1}$$

un système d'équations différentielles dont les deuxièmes membres sont continus dans un ensemble ouvert Ω, tel que sa section par un plan $t=c$ quelconque constitue un parallélépipede de la forme

$$-\infty \leqslant \alpha_i(c) < y^i < \beta_i(c) \leqslant +\infty, \quad (i=1, \ldots, n) \tag{5,2}$$

Ceci étant supposé nous avons les propositions suivantes I, II, III.

I.) La condition nécessaire et suffisante pour qu'à toute couple de points appartenant à Ω

$$A=(t_0, a_1, \ldots, a_n), \quad B=(t_0, b_1, \ldots, b_n)$$

tels que $A \leqslant B$**) et à toute intégrale $\Phi(t)=(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$ du système (5,1) issue de A corresponde une intégrale $\Psi(t)$

---

*) La différence entre la signification du signe „$\leqslant$" dans les relations $C \leqslant D$ et $\Phi(t) \leqslant \Psi(t)$ ne prêtera pas à l'équivoque.

**) Cf. la précédente Définition I.

de ce système qui passe par B et majore $\Phi(t)$ dans un petit voisinage *bilatéral* de t_0***) consiste en ce que la fonction f^i ne dépende pas des variables $y^1, \dots, y^{i-1}, y^{i+1}, \dots, y^n$.

Cette dernière propriété revient à ce que le système (5,1) doit être de la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy^1}{dt} &= g^1(t, y^1) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy^n}{dt} &= g^n(t, y^n) \end{aligned}\right\} \quad (5,3)$$

II. La condition nécessaire et suffisante pour qu'à toute couple de points A, B de la même sorte et pour toute intégrale $\Psi(t)$ issue de B existe une intégrale $\Phi(t)$ issue de A et minorant $\Psi(t)$ dans un petit voisinage *bilatéral* de t_0 consiste en ce que le système (5,1) soit de la forme (5,3).

III. Supposons accessoirement que par tout point P de Ω il passe une intégrale unique $Y(P;t)$ du système (5,1). Ceci étant admis, la condition nécessaire et suffisante afin que pour toute couple $A \leqslant B$ de points de Ω l'integrale $Y(B;t)$ majore $Y(A;t)$ dans un petit voisinage bilatéral de t_0 consiste en ce que le système (5,1) soit de la forme (5,3).

Démostration. Les démonstrations des propositions I, II et III étant analogues, nous nous bornerons à la démonstration de la proposition I.

Notre condition est suffisante en vertu des Théorèmes 2 (§ 1) et 2 bis (§ 4).

Nous passons à la démonstration de la nécessité de cette condition.

A toute couple de point A et B ($A \leqslant B$) appartenant à Ω et à toute intégrale $\Phi(t)$ du système (5,1) issue de A correspond, par hypothèse, une intégrale $\Psi(t)$ de (5,1) issue de B et majorant $\Phi(t)$ dans un petit voisinage bilatéral de t_0. Il en résulte, en vertu des Lemmes 2 (§ 2) et 2 bis (§ 4), que

***) C.-à-d. vérifie la relation $\Phi(t) \leqslant \Psi(t)$ pour $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est un nombre suffisamment petit (cf. la précédente Définition II).

les fonctions f^i remplissent dans Ω à la fois les Hypothèses K (§ 1) et K bis (§ 2). La fonction f^i est donc à la fois croissante et décroissante au sens large (et parsuite constante) relativement à chacune de variables $y^1, y^2, \ldots, y^{i-1}, y^{i+1}, \ldots, y^n$ *séparément*.

Afin d'en conclure que le système (5,1) à la forme (5,3) considérons deux points de Ω

$$K = (c, k^1, \ldots, k^{i-1}, y^i, k^{i+1}, \ldots, k^n),$$
$$L = (c, l^1, \ldots, l^{i-1}, y^i, l^{i+1}, \ldots, l^n).$$

Il suffira de prouver que $f^i(K) = f^i(L)$.

Relions, à cet effet, les points K et L par une ligne polygonale des côtés parallèles sucessivement aux axes de coordonnées $y^1, \ldots, y^{i-1}, y^{i+1}, \ldots, y^n$. Cette ligne polygonale appartient évidemment au parallélépipède (5,2) et à plus forte raison, à Ω. La fonction f^i étant constante le long de chaque côté de cette ligne, il s'ensuit que f $(K) = f^i(L)$.

§ 6. Comparaison des intégrales des deux systèmes dont l'un majore l'autre.

Théorème 5. Supposons que les fonctions $f^i(t, y^1, \ldots, y^n)$ et $g^i(t, y^1, \ldots, y^n)$ soient continues dans un ensemble ouvert Ω et soient

$$A = (t_0, a_1, \ldots, a_n), B = (t_0, b_1, \ldots, b_n)$$

deux points quelconques de Ω, tels que $A \leqslant B$ (c.-à-d. $a_i \leqslant b_i$ pour $i = 1, \ldots, n$).

Considérons deux systèmes d'équations différentielles

$$\frac{dy^i}{dt} = f^i(t, y^1, \ldots, y^n), (i = 1, \ldots, n), \tag{6,1}$$

$$\frac{dy^i}{dt} = g^i(t, y^1, \ldots, y^n), (i = 1, \ldots, n). \tag{6,2}$$

Ceci étant admis nous avons les propositions suivantes:

I. Si les fonctions f^i remplissent l'Hypothèse H du § 1 et le système (6,1) majore le système (6,2) (c.-à-d. $g^i \leqslant f^i$ dans Ω), si ensuite $\Phi(t)$ désigne une intégrale de (6,2) issue de A et $\Psi(t)$ l'intégrale supérieure droite de (6,1) issue de B *) alors $\Psi(t)$ majore $\Phi(t)$ (cf. Définition II. § 5) à *droite* de

*) Pour l'existence de l'intégrale supérieure cf. Théorème 1 du § 1.

t_0 dans tout intervalle $t_0 \leqslant t < \alpha$ dans lequel ces deux intégrales existent.

II. Si les fonctions f^i remplissent dans Ω l'Hypothèse H et le système (6,2) majore (6,1) dans Ω (c.-à-d. $f^i \leqslant g^i$), si $\Psi(t)$ désigne une intégrale du système (6,2) issue de B et $\Phi(t)$ l'intégrale inférieure droite de (6,1) relative à A alors $\Psi(t)$ majore $\Phi(t)$ à droite de t_0 dans tout intervalle $t_0 \leqslant t < \alpha$ dans lequel ces deux intégrales existent.

III. Si les fonctions f^i remplissent dans Ω l'Hypothèse H *bis* du § 4 et le système (6,2) majore (6,1) dans Ω, si $\Phi(t)$ désigne une intégrale quelconque de (6,2) issue de A et $\Psi(t)$ l'intégrale supérieure gauche de (6,1) relative à B, alors $\Psi(t)$ majore $\Phi(t)$ à gauche de t_0 dans tout intervalle $\alpha < t \leqslant t_0$ dans lequel ces deux intégrales existent.

IV. Si les fonctions f^i remplissent dans Ω l'Hypothèse H *bis* et le système (6,1) majore (6,2) dans Ω (c.-à-d. $f^i \geqslant g^i$)' si $\Psi(t)$ est une intégrale quelconque de (6,2) issue de B et $\Phi(t)$ l'intégrale inférieure gauche de (6,1) relative à A, alors $\Psi(t)$ majore $\Phi(t)$ à gauche de t_0 dans tout intervalle $\alpha < t \leqslant t_0$ dans lequel ces deux intégrales existent.

Démonstration. Ce théorème constitue une consequence immédiate des Théorèmes 2 (§ 1) et 2 bis (§ 4).

Exemple. Nous allons montrer que l'Hypothèse K du § 1 n'est pas suffisante pour la vérité du Théorème 5. De notre exemple il résulte en même temps que, pour être strict, il faut, dans un thèoréme de M. Kamke*) admettre sur l'ensemble Ω une hypothèse accessoire p. ex. qu'il jouit de la Propriété P du § 1.

Considérons deux ensembles Ω_1 et Ω_2 définies par les inégalités

$$y_1^2 + y_2^2 < 1, -\infty < t < +\infty, -\infty < y_3 < +\infty \quad \text{(ensemble } \Omega_1\text{)}$$

$$(y_1 - 3)^2 + (y_2 - 3)^2 < 1, -\infty < t < +\infty, -\infty < y_2 < +\infty$$

---

*) Kamke l c. Acta Mat. T. 58 p 74. Satz 6.

(ensemble Ω_2) et posons

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$$

Nous définirons deux systèmes d'équations

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, y_3),\ (i = 1, 2, 3) \tag{6,3}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = g_i(t, y_1, y_2, y_3),\ (i = 1, 2, 3) \tag{6,4}$$

Nous posons

$$f_i \equiv 0 \text{ dans } \Omega_1, f_i \equiv -2 \text{ dans } \Omega_2, (i = 1, 2, 3)$$
$$g_i \equiv 1 \text{ dans } \Omega_1, g_i \equiv -1 \text{ dans } \Omega_2, (i \equiv 1, 2, 3).$$

On vérifie, comme précédemment (cf. l'alinéa VI de l'Exemple du § 3), que chacun des systèmes (6,3) et (6,4) remplit l'Hypothèse K dans Ω. On a

$$f_i < g_i,\ (i = 1, 2, 3) \text{ dans } \Omega.$$

Envisageons les points

$$A = (t_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0, 0,),$$
$$B = (t_0, b_1, b_2, b_3) \equiv (0. 3, 3, 0).$$

On a $a_i < b_i$, $(i = 1, 2, 3)$. L'intégrale du système (6,3) issue de A est

$$y_i = \varphi_i(t) \equiv 0,\ (i = 1, 2, 3)$$

et l'intégrale $y_i = \psi_i(t)$, $(i = 1, 2, 3)$ du système (6,4) issue de B est de la forme $\psi_i(t) = 3 - t$, $(i = 1,2)$; $\psi_3(t) = -t$.

On a, en contradiction avec le Théorème 5, $\varphi_3(t) > \psi_3(t)$ pour $t > 0$.

Moyennant quelques complications on pourrait s'arranger de façon que Ω même et toutes ses sections par les plans $t = const$, soient connexes.

Voici encore un théorème rentrant dans le même ordre d'idées:

Théorème 5 bis.*) Supposons que les systèmes

$$\frac{dy^i}{dt} = g^i_\nu(t, y^1, \ldots, y^n), \ (i=1,\ldots, n) \ (Système\ S_\nu)$$

$$\frac{dy^i}{dt} = g^i(t, y^1, \ldots, y^n, \ (i=1,\ldots, n) \quad (Système\ S)$$

satisfassent aux conditions suivantes:

1°) S et S_ν, $(\nu=1,\ldots,\infty)$ remplissent l'Hypothèse H dans un ensemble ouvert Ω.

2°) g^i_ν tend uniformément vers g^i dans toute partie bornée et fermée de Ω lorsque ν tend vers ∞.

3°) $g^i_\nu \geqslant g^i$ dans Ω.

Soit $A_\nu = (t_0, \overset{\nu}{a}_1, \ldots, \overset{\nu}{a}_n)$ une suite de points de Ω tendant vers $A=(t_0, a_1, \ldots, a_n)$ où A appartient à Ω et $\overset{\nu}{a}_i \geqslant a_i$.

Soient respectivement $y^i = \tau^i(t)$ et $y^i = \tau^i_\nu(t)$, $(i=1,\ldots,n)$ les intégrales supérieures à droite des systèmes S et S_ν issues respectivement de A et A_ν et prolongées jusqu' à la frontière de Ω. Soit $t_0 \leqslant t < b$ l'intervalle d'existence de $\tau^i(t)$ et soit $t_0 < c < b$.

Ceci étant supposé les intégrales $\tau^i_\nu(t)$ existent, à partir d'un indice ν assez grand $(\nu \geqslant N)$ dans l'intervalle $t_0 \leqslant t \leqslant c$, y remplissent les inégalités $\tau_i(t) \leqslant \tau^i_\nu(t)$ et y tendent uniformément vers $\tau_i(t)$.

Remarque 1. En appliquant la transformation $y^i = -\eta_i$ ou bien $t = -v$ on deduit du théorème précédent les théorèmes analogues relatifs aux intégrales inférieures à droite et aux intégrales extrémales à gauche (dans le cas de l'Hypothèse *H bis*).

La démonstration du Théorème 5 bis est tout analogue à celle du Théorème

---

*) Un théorème de M. Kamke (Acta Mat. l. c. Satz 10, p. 83) qui est formulé d'une façon moins générale nécessite aussi une hypothèse accessoire.

§ 7. L'extension, au moyen d'un changement des variables, des précédentes méthodes de majoration et de minoration.

Remarque 2. Supposons que le système

$$\frac{dy^i}{dt} = f^i(t, y^1, \dots, y^n), \quad (i = 1, \dots, n) \qquad (7,1)$$

remplisse l'Hypothése H du § 1 et soit $y^i = \psi^i(t)$, $(i = 1, \dots, n)$ une courbe (que nous désignerons par C) issue d'un point $A = (t_0, a_1, \dots, a_n)$.

Le Théorème 2 du § 1 permet de majorer (ou de minorer) sous certaines conditions (cf. (1,11), (1,12, (1,12a) ou (1,15), (1,16), (1,16a), cette courbe au moyen de certaines intégrales du système (7,1). Cette majoration (ou minoration) n'est valable que dans les conditions suivantes α_1 et α

α_1) l'intervalle Δ s'étend *à droite* de t_0 et, par conséquent se compose de points pour lesquels $t_0 \leq t < a$,

α_2) le morceau de la courbe C correspondant à l'intervalle Δ est renfermé dans l'ensemble ouvert Ω, dans lequel le système (7,1) remplit l'Hypothèse H.

On peut parfois, par un changement des variables, obtenir une limitation de la courbe C même dans le cas où ni la condition α_1 ni α_2 n'est pas remplie.

I.) Supposons, par exemple, que le point A appartienne à Ω et qu'il s'agisse d'obtenir une limitation de S *à gauche* de t_0.

Nous désignons d'abord, à cet effet, la variable t *dans l'équation* de C par une autre lettre, par exemple par u. L'équation de C prendra la forme $y^i = \psi^i(u)$, $(i = 1, \dots, n)$.

Appliquons le changement des variables

$$u = -t + 2t_0, \quad y^i = y^i \qquad (7,2)$$

et posons

$$\sigma^i(t) = \psi^i(2t_0 - t).$$

On a $\sigma^i(t_0) = \psi^i(t_0)$. S'il arrive, par exemple, que, dans un intervalle $t_0 < t < t_0 + \beta$,

$$\text{on a } \underline{D}_{(+)}\sigma^i(t) \leq f^i(t, \sigma^1(t) \dots, \sigma^n(t))$$

et si l'intégrale supérieure à droite $\tau^i(t)$ (du système (7,1) issue

d'un point $B=(t_0, b_1, \dots, b_n)$, $a_i < b_i$, existe dans l'intervalle $t_0 < t < \beta$ alors on aura

$$\sigma^i(t) < \tau^i(t) \quad \text{pour } t_0 < t < t_0+\beta,$$

c.-à-d. $\psi^i(2\, t_0 - t) < \tau^i(t)$ ou bien

$$\psi^i(u) \leqslant \sigma^i(2\, t_0 - u) \text{ ou enfin}$$

$$\psi^i(t) \leqslant \sigma^i(2\, t_0 - t) \quad \text{pour } t_0 - \beta \leqslant t < t_0.$$

On obtiendra ainsi une majoration de la courbe $y^i = \psi^i(t)$ *à gauche* de t_0.

II. Il peut arriver que le point A de la courbe C n'appartienne pas à Ω. Dans ce cas on écrira d'abord (en remlançant y^i par x^i et t par u) l'équation de C sous la forme: $x^i = \psi^i(u)$, $(i=1, \dots, n)$. On choisira ensuite un point $P=(t_1, p_1, \dots, p_n)$ dans Ω et on soumettra la courbe C à la transformation

$$u = \varepsilon\,(t - t_1) + t_0 \quad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1 \qquad (7{,}2\text{a})$$

$$y^i = x^i + p^i - a^i\,.^{*)}$$

et on cherchera ensuite d'appliquer le Théorème 2.

Remarque 3. Il peut arriver que le système (7,1) ne remplisse pas l'Hypothèse H, mais si l'on l'assujettit à une transformation T de la forme $y^i = \vartheta^i(x^1, \dots, x^n)$, $t = \lambda(\varrho)$ il passe en un système remplissant cette hypothèse. Si $x^i = \eta^i(y^1, \dots, y^n)$, $\varrho = \mu(t)$ est la transformation inverse, le Théorème 2, en cas de son applicabilité, conduira aux inégalités de la forme $\eta^i(\psi^1(t), \dots, \psi^n(t)) \leqslant \eta^i(\tau^1(\mu(t)), \dots, \tau^n(\mu(t))$ où $x^i = \tau^i(\varrho)$, $(i=1, \dots, n)$ représente une intégrale convenable du système S. Deux cas présentent un intérêt spécial: 1⁰) lorsque T est une transformation linéaire aux coeffitiets constants et 2⁰) lorsque T est de la forme $y^i = \varepsilon_i x^i$ où $(\varepsilon_i)^2 = 1$.

---

*) On pourrait, plus généralement, appliquer une transformation de la forme

$$u = \lambda(t), \quad (\lambda(t) \neq 0), \quad y^i = \zeta^i(x^1, \dots, x^n) \qquad (7{,}3)$$

où les fonctions ζ^i sont suffisamment régulières et satisfont aux inégalités $\zeta^i(x^1, \dots, x^n) \geqslant \zeta^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ lorsque $x^j \geqslant \bar{x}^j$, $(j=1, \dots, n)$.

Le système d'inégalités $x^j \geqslant \bar{x}^j$ est invariant relativement à des telles transformations, — c'est essentiel.

Remarque 4. La même méthode peut rendre services au cas de la comparaison des intégrales de deux systèmes d'équations différentielles (cf. le Théorème 5 du § 6).

Soit

$$\frac{dy^i}{dt} = g^i(t, y^1, \ldots, y^n), \quad i=1,\ldots, n) \tag{7,4}$$

un système qui n'est pas majoré par (7,1). Nous commençons par remlacer, dans (7;4), les variables par d'autres lettres. Ce système prendra la forme

$$\frac{dx^i}{dt} = g^i(u, x^1, \ldots, x^n), \quad (i=1,\ldots, n) \tag{7,5}$$

On applique à ce système une transformation de la forme (7,2), (7 a) ou (7,3). (cf. la note en bas de la page précédente). Le système (7,5) passera alors en système

$$\frac{dy^i}{dt} = G^i(t, y^1, \ldots, y^n), \quad i=1,\ldots, n)$$

S'il est majoré ou minoré par (7,1) on appliquera le Théorème 5 du § 6.

Remarque 5. Une méthode analogue s'applique au cas où le système (7,1) remplit l'Hypothèse *H bis* du § 4.

§ 8. Majoration et minoration des modules des composantes d'une courbe. Notations. Nous désignerons par

$$D_{(+)}\varphi(t)$$

chaque nombre k auquel appartient au moins une suite $h_1 h_2, \ldots$, ($h_\nu > 0$, $h_\nu \to 0$), telle que

$$\frac{\varphi(t+h_\nu) - \varphi(t)}{h_\nu} \to k.$$

$D_{(+)}\varphi(t)$ sera appelé *nombre dérivé moyen* à droite. On définit d'une façon analoque les nombres dérivés à gauche $D_{(-)}\varphi(t)$.

Les quatre nombres dérivés extrémaux $\overline{D}_{(+)}\varphi(t)$, $\underline{D}_{(+)}\varphi(t)$, $\overline{D}_{(-)}\varphi(t)$, $\underline{D}_{(-)}\varphi(t)$ représentent des cas particuliers de $D_{(+)}\varphi(t)$ et $D_{(-)}\varphi(t)$.

On a $\underline{D}_{(+)}\,\varphi(t) \leqslant D_{(+)}\,\varphi(t) \leqslant \overline{D}_{(+)}\,\varphi(t)$ et $\underline{D}_{(-)}\,\varphi(t) \leqslant$ $\leqslant D_{(-)}\,\varphi(t) \leqslant \overline{D}_{(-)}\,\varphi(t)$. Ces inégalités subsistent pour touts les nombres dérivés moyens $D_{(+)}\,\varphi(t)$ et $D_{(-)}\,\varphi(t)$.

Remarque 6. En vertu des inégalités

$$\frac{|\varphi(t+h)|-|\varphi(t)|}{h} \leqslant \left|\frac{|\varphi(t+h)|-|\varphi(t)|}{h}\right| \leqslant \left|\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\right|$$

on obtient facilement les inégalités

$$\underline{D}_{(+)}\,|\varphi(t)| \leqslant |D_{(+)}\,\varphi(t)|, \quad \underline{D}_{(-)}\,|\varphi(t)| \leqslant |D_{(-)}\,\varphi(t)| \tag{8,1}$$

qui subsistent pour chaque nombre dérivé moyen $D_{(+)}\varphi(t)$ et $D_{(-)}\varphi(t)$.

Théorème 6. Si

1°) le système

$$\frac{dy^i}{dt} = f^i(t, y^1, \ldots, y^n), \quad i=1,\ldots, n) \tag{8,2}$$

satisfait à l'Hypothèse H du § 1 dans un ensemble ouvert Ω

2°) les fonctions $\varphi^i(t)$ sont continues dans l'intervalle $t_0 \leqslant t < t + \alpha$ et la courbe $y^i = |\varphi^i(t)|$, $(i=1,\ldots, n)$ est renfermée dans Ω et remplit les inégalités

$$|D_{(+)}\varphi^i(t)| < f^i(t, |\varphi^1(t)|, \ldots, |\varphi^n(t)|), \ (i=1,\ldots, n)\,^{*)}$$

pour $t_0 < t < t_0 + \alpha$,

3°). Le point $B=(t_0, b_1, \ldots, b_n)$ appartient à Ω et

$$|\varphi^i(t_0)| < b_i, \ (i=1,\ldots, n),$$

4°) l'intégrale supérieure à droite de (8,2) $y^i = \tau^i(t)$ issue de B existe dans l'intervalle $t_0 < t < t_0 + \alpha$,

alors on a

$$|\varphi^i(t)| < \tau^i(t) \quad \text{lorsque } t_0 < t < t + \alpha,$$

*) Nous entendons par cela qu 'à chaque indice i et à chaque t correspond au moins un nombre dérivé moyen $D_{+}\varphi^i(t)$ satifaisant à cette inégalité

Démonstration. Il suffit de remarquer (cf. 8,1) que $D_{(+)} | \varphi^i(t) | < f^i(t, |\varphi^1(t)|, \ldots, |\varphi^n(t)|)$ et d'appliquer le Théorème 2 du § 1.

En s'appuyant sur le Théorème 2 bis du § 4 on obtient un théorème analogue que voici:

Théorème 6 bis. Si:

1°) le système

$$\frac{dx^i}{ds} = F^i(s, x^1, \ldots, x\ ), \quad (i = 1, \ldots\ ; n)$$

satisfait à l'Hypothèse *H bis* du § 4 dans un ensemble ouvert Ω

2°) les fonctions $\varphi^i(s)$ sont continues dans l'intervalle $s_0 - \beta < s < s_0$ et la courbe $x^i = |\varphi^i(s)|, (i = 1, \ldots, n)$ est renfermée dans Ω et remplit les inégalités

$$| D_{(-)} \varphi^i(s) | < F^i(s, |\varphi^1(s)|, \ldots, |\varphi^n(s)| \quad (i = 1, \ldots, n)$$

pour $s_0 - \beta < s < s_0$,

3°) le point $A = (s_0, a_1, \ldots, a_n)$ appartient à Ω et $|\varphi^i(s_0)| \geqslant \geqslant a_i, (i = 1, \ldots, n)$.

4°) l'intégrale inférieure à gauche de (8,3) $x^i = \eta^i(s)$ issue de A existe dans l'intervalle $s_0 - \beta < s < s_0$, alors on a:

$$|\varphi^i(s)| \geqslant \eta^i(s) \text{ lorsque } s_0 - \beta > s \geqslant s_0.$$

Remarque 7. En appliquant à la courbe $y^i = \varphi^i(t)$ un changement de variables, p. ex. de la forme (7,2), on obtiendra un théorème concernant la possibilité d'une *majoration* des modules $|\varphi^i(t)|$ *à gauche* de t_0. Une remarque analogue se rapporte à la possibilité d'une *minoration* de $|\varphi^i(s)|$ à *droite* de s_0.

§ 9. Limitation des modules des intégrales des systèmes d'équations différentielles. Une méthode d'apprécier l'erreur des solutions approchées de tels systèmes.

Hypothèse L. Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{du^i}{d\varrho} = \sigma_i(\varrho, u^1, \ldots, u_n), \ (i = 1, \ldots, n) \tag{9,1}$$

Nous supposons que les fonctions

$$\sigma_i(\varrho, u_1, \ldots, u_n), \ (i = 1, \ldots, n) \tag{9,2}$$

soient continues et non négatives dans un ensemble Θ défini par les inégalités

$$0 \leqslant \varrho < \beta < +\infty, 0 \leqslant u_j < +\infty, \ (j = 1, \ldots, n) \ (\textit{ensemble } \Theta) \tag{9,3}$$

$$\sigma_i(\varrho, u_1, \ldots, u_n) \geqslant 0 \quad \text{dans } \Theta \tag{9,4}$$

Nous supposons enfin que la fonction σ_i, $(i = 1, \ldots, n)$ soit croissante (au sens large) dans l'intervalle fermé $(0, +\infty)$ séparément par rapport à chacune des variables $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$.

Notation. Nous désignerons par

$$u_i = \tau_i(\varrho; k_1, \ldots, k_n), \ (j = 1, \ldots, n) \tag{9,5}$$

l'intégrale supérieure à droite du système (9,1) issue du point

$$\varrho = 0, \ u_j = k_j \geqslant 0, \ (j = 1, \ldots, n) \tag{9,6}$$

Remarque 8. Le système (9,1) remplissant l'Hypothèse *L* ne satisfait pas à l'Hypothèse *H* du § 1 parce que l'ensemble Θ n'est pas ouvert. L'existence de l'intégrale supérieure (9,5) n'est donc pas, a priori, certaine. On pourra néanmoins établir cette existence et étendre certains résultats valables dans l'Hypothèse *H* grâce au lemme suivant.

Lemme 3. Si les fonctions $\sigma_i(\varrho, u_1, \ldots, u_n)$ remplissant l'Hypothèse *L* dans l'ensemble Θ défini par les relations (9,3) alors il existe une suite de fonctions

$$\chi_i(\varrho, u_1, \ldots, u_n), \ (i = 1, \ldots, n) \tag{9,7}$$

remplissant les conditions suivantes

I) elles sont continues dans l'ensemble ouvert Ω défini par les inégalités $-\delta < \varrho < \delta, -\infty < u_j < +\infty, (j = 1, \ldots, n)$ (*ensemble* Ω)

II) on a

$$\chi^i \geqslant 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \chi^i \equiv \sigma_i \text{ dans } \Theta \tag{9,8}$$

III. le système d'équations différentielles

$$\frac{du_i}{d\varrho} = \chi_i(\varrho, u_1, \ldots, u_n), \ (i, \ldots, n) \tag{9,9}$$

remplit l'Hypothèse H du § 1 dans l'ensemble Ω.

Démonstration: Soit d'abord $P = (\varrho, u_1, \ldots, u_n)$ un point de l'ensemble Ω (défini tout à l'heure) pour lequel $\varrho \geqslant 0$. Soient $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_k}$ celles de ses coordonnées qui sont négatives. En remplacant ces coordonnées par 0 et en ne changeant pas les autres, nous obtiendrons un point $Q = (\varrho, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$ appartenant à l'ensemble Θ. Nous posons $\chi^i(P) = \sigma^i(Q)$, $(i, \ldots, n)$

Les fonctions χ_i se trouvent ainsi définies dans l'ensemble de points pour lesquels on a

$$0 \leqslant \varrho < \delta, -\infty < u_j < +\infty, \ (j = 1, \ldots, n)$$

En posant pour $-\delta < \varrho < 0$

$$\chi_i(\varrho, u_1, \ldots, u_n) = \chi_i(-\varrho, u_1, \ldots, v_n)$$

nous obtenons des fonctions définies dans Ω. On vérifie facilement qu'elles remplissent les conditions I), II) et III).

Théorème 7. Supposons que le système d'équations différentielles (9, 1) remplisse dans l'ensemble Θ (cf. 9, 3) l'Hypothèse L du présent paragraphe.

Ceci étant admis on a les propriétés suivantes:

I. A chaque point

$$\varrho = 0, \ u_i = k_i \geqslant 0, \ (i = 1, \ldots, n) \tag{9,10}$$

correspond une intégrale supérieure à droite (unique)

$$u_i = \tau_i(\varrho; k_1, \ldots, k_n) \tag{9,11}$$

du système (9, 1) issue de ce point et définie dans un intervalle maximal

$$0 \leqslant \varrho < a \tag{9,12}$$

II. Pour toute courbe continue $u_i = \eta_i(t)$ remplisant les conditions

$$\eta_i(0) < k_i, \eta_i(t) \geqslant 0 \text{ pour } 0 < t < b \leqslant a$$

et pour laquelle on a ou bien
$\underline{D}_{(+)}\eta_i(t) \leqslant \sigma_i(t, \eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$ pour $i =, \ldots, n$ et $0 < t < b$
ou bien
$\underline{D}_{(-)}\eta_i(t) \leqslant \sigma_i(t, \eta_1(t), \ldots, \eta_n(t))$ pour $i - 1, \ldots, n$ et $0 < t < b$
subsistent forcément les inégalités

$$\eta_i(t) < \tau_i(t; k_1, \ldots, k_n) \text{ pour } 0 < t < b.$$

(Pour la signification de a et des fonctions $\tau_i(t; k_1, \ldots, k_n)$ cf. la partie I du présent théorème).
III. Soit Δ un intervalle contenant 0 et faisant partie de l'intervalle $-a < t < a$*) et supposons que la courbe $u_i = \eta_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ soit continue dans Δ.
Soit

$$|\eta_i(0)| < k_i < +\infty, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

et supposons que, ou bien, pour tous les points t de Δ $(t \neq 0)$, on ait**)

$$D_{(+)}\eta_i(t) | < \sigma_i(|t|, |\eta_1(t)|, \ldots, |\eta_n(t)|, \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (9,13)$$

ou bien, pour tous les points t de Δ, $(t < 0)$, on ait
$|D_{-}\eta_i(t)| < \sigma_i(|t|, |\eta_1(t)|, \ldots, |\eta_n(t)|), \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (9,14).$
Ceci étant admis, on a dans Δ les inégalités

$$|\eta_i(t) \leqslant \tau_i(|t|, k_1, \ldots, k_n) \quad (9,15)$$

IV. Pour chaque courbe $u_i = \Psi_i(x)$, $(i = 1, \ldots, n)$ continue dans l'intervalle $|x - x_0| < b \leqslant a$ remplissant la condition $|\Psi_i(x_0)| < k_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ et pour laquelle on ou bien

$$|D_{(+)}\Psi_i(x)| < \sigma_i(|x - x_0|, |\Psi_1(x)|, \ldots, |\Psi_n(x)|)$$
$$\text{lorsque } 0 < |x - x_0| < b$$

ou bien

---

*) La signification de a est la même que dans (9, 12).

**) La signification des nombres dérivés moyens $D_{+}\eta_i(t)$, $D_{-}\eta_i(t)$ a été rappelé dans le § 8 (Notations). Les inégalités (9, 13) (et les inégalités analogues dans la suite) doivent être interprétées de la façon suifante: A chaque t correspond un certain nombre dérivé $D_{+}\eta_i(t)$ vérifiant (9, 13).

$$|D_{(-)}\Psi_i(x)| < \sigma_i(|x-x_0|, |\Psi_1(x)|, \ldots, |\Psi_n(x)|)$$
$$\text{lorsque } 0<|x-x_0|<b$$

on a forcément les inégalités

$$|\Psi_i(x)| < \tau_i(|x-x_0|, k_1, \ldots, k_n)$$
$$\text{pour } i=1,\ldots, n \text{ et } 0<|x-x_0|<b.$$

Démonstration. *Ad.* I. Considérons le système auxiliaire (9, 9)*)

En vertu du Théorème 1 du § 1 il existe, pour ce système, une intégrale supérieure à droite issue du point (9, 6):

$$u_i = \tau_i(\varrho; k_1, \ldots, k_n), \ (i=1,\ldots, n) \qquad (9,16)$$

L'intervalle maximal dans lequel elle existe aura la forme (9,12) c.-à-d. il sera composé des ϱ pour lesquels

$$0<\varrho<a.$$

Considérons la courbe

$$u_i = \psi_i(\varrho) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad 0<\varrho<a$$

On aura en vertu de (9,8)

$$\frac{d\psi_i}{d\varrho} = 0 < \chi_i(\varrho, \psi_1(\varrho), \ldots, \psi_n(\varrho))$$

d'où il résulte, en vertu du Théorème 2, que $0=\psi_i(\varrho)<$ $<\tau_i(\varrho_j\, k_1, \ldots, k_n)$ pour $0<\varrho<a$.

Ces inégalités expriment que la courbe (9,16) est située dans l'ensemble Θ (cf. 9,3) dans lequel le système (9,1) coïncide avec le système (9,9) (cf. 9,8). La courbe (9,16) constitue donc l'intégrale supérieure à droite du système (9,1) issue du point (9,6)**).

Ad II. En se servant du système (9,9) on ramène immédiatement la partie II du présent théorème au Théorème 2 du § 1.

Ad III. En observant que $\underline{D}_{(+)}|\psi_i(t)| < |D_{(+)}\psi_i(t)|$, (cf. 8,8)

*) Ce système remplit l'Hypothèse H dans Ω (cf. Lemme 3).

**) On pourrait obtenir le même résultat, sans introduire le système auxiliaire (9 9), en appliquant le même raisonnement qui a servi à la démonstration du Théorème 1.

on déduit de (9,13) pour $t>0$ les inégalités

$$\underline{D}_+ |\varphi_i(t)| < \sigma_i(t, |\varphi_1(t)| \ldots, |\varphi_n(t)|),$$

d'où il résulte, en vertu de la partie II du présent théorème, que les inégalités (9,15) ont lieu pour les $t \geqslant 0$ *).

Afin d'établir ces inégalités, pour les $t<0$ de intervalle Δ, on appliquera la méthode du changement des variables du § 7 et l'on posera

$$\nu = -t, \ \lambda_i(\nu) = \varphi_i(-\nu) = \varphi_i(t).$$

On aura $D_{(-)} \lambda_i(\nu) = -D_{(+)} \varphi_i(t)$ et (cf. 8,8)

$$D_{(-)} |\lambda_i(\nu)| \leqslant |D_{(-)} \lambda_i(\nu)| = |D_{(+)} \varphi_i(t)|.$$

L'inégalité (9,13) prendra donc pour les $\nu>0$ (c.-à-d. pour les $t<0$), la forme

$$D_{(-)} |\lambda_i(\nu)| \leqslant | D_{(-)} \lambda_i(\nu)| < \sigma_i(\nu, |\lambda_1(\nu)|, \ldots, |\lambda_n(\nu)|)$$

d'où il résultera, comme précédemment, que

$$|\lambda_i(\nu)| < \tau_i(\nu, k_1, \ldots, k_n) \quad \text{pour} \quad \nu \geqslant 0$$

$$\text{c.-à-d.} \ |\varphi_i(t)| < \tau_i(|t|; \ k_1, \ldots, k_n) \quad \text{pour} \quad t \leqslant 0.$$

Ad IV. On ramène la partie IV du présent théorème à la partie III par le changement de variable $x - x_0 = t$.

Théorème 8. Conservons l'Hypothèse L relativement au système auxiliaire (9,1) et désignons par

$$u_i = \tau_i(\varrho; \, k_1, \ldots, k_n), \ (i = 1, \ldots, n)$$

l'intégrale supérieure à droite de ce système auxiliaire issue du point $\varrho = 0$, $u_i = k_i \geqslant 0$, $(i = 1, \ldots, n)$. L'intervalle maximal de l'existence de cette intégrale sera déterminé par l'inégalité

$$0 \leqslant \varrho < a = a(k_1 \ldots, k_n).$$

Supposons que les fonctions f_i intervenant dans le système

$$\frac{d y_i}{d x} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \ (i = 1, \ldots, n) \qquad (9,17)$$

*) On démontre pareillement que (9,15) résulte de (9,14).

soient continues dans le domaine

$$|x-\mathring{x}|<h,\quad |y_i-\mathring{y}_i|<b_i,\quad (i=1,\dots,n) \tag{9,18}$$

et qu'elles y remplissent les inégalités

$$|f_i(x,y_1,\dots,y_n)| \leqslant \sigma_i(|x-\mathring{x}|,\ |y_1-\mathring{y}_1|,\dots,|y_n-\mathring{y}_n|)\ . \tag{9,19}$$

Soit

$$y_i=\varphi_i(x),\quad (i=1,\dots,n) \tag{9,20}$$

une intégrale du système (9,17), telle que

$$|\varphi_i(\mathring{x})-\mathring{y}_i|\leqslant k_i<b_i,\quad (i=1,\dots,n)$$

Désignons par ϱ_i la plus petite racine positive de l'équation

$$\tau_i(\varrho;\ k_1,\dots,k_n)=b_i$$

et dans le cas où une telle racine n'existe pas, posons $\varrho_i=+\infty$. Ceci étant admis, l'intégrale (9,20) peut être prolongée de façon qu'elle existe dans l'intervalle

$$|x-x_0|<\text{minimum}\ (a,\ h,\ \varrho_1,\dots,\varrho_n)$$

et elle remplit dans cet intervalle les inégalités

$$|\varphi_i(x)-\mathring{y}_i|\leqslant \tau_i(|x-\mathring{x}|,\ k_1,\dots,k_n)\text{*)} \qquad (9,21$$

Démonstration. Ce théorème résulte immédiatement des parties I et IV du Théorème 7 lorsque l'on pose $\psi_i(x)= =\varphi_i(x)-\mathring{y}_i$.

Corollaire 2. Si, dans le théorème précédent $b_i=+\infty$ c.-à-d., si les fonctions f_i remplissent les hypothèses précédentes dans le domaine

$$|x-\mathring{x}|<h,\quad -\infty<y_i<+\infty$$

alors l'intégrale (9,20) peut être prolongée de façon qu'elle existe dans l'intervalle $|x-\mathring{x}|<\min\,(a,h)$ et elle y remplit les inégalités (9,21).

Théorème 9)** Conservons relativement au système (9,1) l'Hypothèse *L* ainsi que la définition du nombre *a* et des fonctions $\tau_i\,(\varrho,\ k_1,\dots,k_n)$ (cf. Théoréme 8).

---

*) Le cas le plus intéressant est celui où $k_i=|\varphi_i(\mathring{x})-\mathring{y}_i|$.

**) Des théorèmes analogues subsistent dans le domaine des variables complexes cf. T. Ważewski. *Sur l'appréciation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires et de leur domaine d'existence*

(v. la suite en bas de la page suivante)

Considérons deux systèmes d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx}=g_i\,(x, y_1, \ldots, y_n), \; (i=1, \ldots, n) \qquad (9{,}22)$$

$$\frac{dy_i}{dx}=G_i\,(x, y_1, \ldots, y_n) \; (i=1, \ldots, n) \qquad (9{,}23)$$

dont les deuxièmes membres sont continues dans le domaine

$$|x-\mathring{x}|<h| \;\; y_i-\mathring{y}_i|<b, \; (i=1, \ldots, n) \qquad (9{,}24)$$

Supposons que, dans ce domaine, on ait les inégalités

$$\begin{aligned} &|G_i(x, y_1, \ldots, y_n)-g_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)| < \\ &< \sigma_i(|x-\mathring{x}|, |y_1-\bar{y}_1|, \ldots, |y_n-\bar{y}_n|) \end{aligned} \qquad (0{,}25)$$

Soient

$$y_1=\varphi_1(x), \ldots, y_n=\varphi_n(x) \qquad (9{,}26)$$

$$y_1=\psi_1(x), \ldots, y_n=\psi_n(x) \qquad (9{,}27)$$

certaines intégrales respectivement du système (9,22) et (9,23) qui existent dans l'intervalle

$$|x-\mathring{x}| < h' < h,$$

sont renfermées dans le domaine (9,24) et pour lesquelles on a

$$|\varphi_i(\mathring{x}) - \psi_i(\mathring{x})| < k_i \qquad (k_i \textit{ constantes}) \qquad (9{,}28)$$

Cela posé on a les inégalités

$$|\varphi_i(x)-\psi_i(x)| \leqslant \tau_i(|x-x_0|; k_1, \ldots, k_n) \qquad (9{,}29)$$

valables dans 'intervalle

$$|x-\mathring{x}| < min\,(a, h').$$

La démonstration découle immédiatement de la partie IV du Théorème 7.

(Suite de la note en bas de la page précédente)
dans le cas des variables complexes. (Annales de la Soc. Polon. de Math. T. XVI. p. 97 et s. s.) Dans l'énoncé du Théorème 2 du travail cité s'est faufilée une erreur évidente: l'inégalité (3, 2) à la page 106 doit avoir la forme de l'inégalité (9,25) du présent travail. Cette erreur a entraîné le fait, — comme me l'a fait remarquer M. J. Szarski, — que l'exemple 3 à la page 109 devrait être remanié.

Corollaire 3. Si l'on pose, dans le théorème précédent

$$g_i(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv G_i(x_1 y_1, \ldots, y_n)$$

on obtient la limitation (9,29) pour la différence de deux intégrales du système (9,22) dans l'hypothèse que leur valeurs initiales remplissent les inégalités (9,28).

§ 10. Une condition d'unicité.

Théorème 10.*) Considérons le système d'équations differentielles

$$\frac{d u_i}{d \varrho} = \sigma_i(\varrho, u_1, \ldots, u_n), \ (i = 1, \ldots, n) \tag{10,1}$$

Désignons par Θ l'ensemble

$$0 \leqslant \varrho < \delta, \ 0 \leqslant u_j < +\infty, \ (j = 1, \ldots, n) \tag{10,2}$$

Supposons que, dans l'ensemble Θ, les fonctions σ_i soient continues, non négatives ($\sigma_i \geqslant 0$) et que la fonction $\sigma_i, (i=1 \ldots, n)$ soit croissante (au sens large) séparément par rapport à chacune des variables $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$. Supposons ensuite que *l'unique* intégrale du systéme (10,1) issue du point $\varrho = 0$, $u_j = 0$, $(j = 1, \ldots, n)$ qui remplit (10,1) dans un intervalle $0 \leqslant \varrho < \zeta$ (où $0 < \zeta < \delta$) soit identiquement nulle.

Ceci étant admis sur le système (10,1) nous avons le suivant critère d'unicité.

Si les deuxièmes membres du système

$$\frac{d y_i}{d x} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \ (i = 1, \ldots, n) \tag{10,3}$$

remplissent dans Ω les inégalités

$$\begin{aligned} |f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)| \leqslant \\ \leqslant \sigma_i(|x - \mathring{x}|, |y_1 - \bar{y}_1|, \ldots, |y_n - \bar{y}_n|) \end{aligned} \tag{10,4}$$

et si le point

$$(\mathring{x}, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n) \tag{10,5}$$

---

*) Communiqué le 13 Septembre 1933 au XIV-ème Congrès des Médecins et Naturalistes Polonais à Poznań, v. Pamiętnik Zjazdu Lekarzy i Przyrodników Polskich w Poznaniu, T. I. p. 199.

appartient à Ω alors deux intégrales $y_i=\varphi_i(x)$, $(i=1,\dots,n)$ et $y_i=\psi_i(x)$, $(i=1,\dots,n)$ de ce système issues du point (10,5) qui vérifient ce système dans un intervalle $|x-\mathring{x}|<\zeta$ (où $0<\zeta<\delta$) sont identiques dans cet intervalle.

Démonstration. Ce théorème résulte immédiatement du Corollaire 3 du § 9. A cet effet il suffit de poser dans les relations suivant (9,20) $k_i=0$ et d'observer que l'intégrale supérieure du système (9,1) issue du point $\varrho=0$, $u_i=0$, $(i=1,\dots,n)$ est identiquement nulle dans l'intervalle

$$0\leqslant\varrho<\zeta, \text{ c.-à-d. } \tau_i(\varrho;0,\dots,0))\equiv 0.$$

§ 11. Solution approché d'un système d'équations différentielles et limitation de l'erreur.

Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx}=g^i(x,y_1,\dots,y_n),\ (i=1,\dots,n) \tag{11,1}$$

qui est difficile à résoudre. On se propose de trouver l'intégrale approchée issue d'un point P et d'apprécier l'erreur. On peut supposer que

$$P=(0,0,\dots,0),\ g^i(0,\dots,0)=0,\ (i=1,\dots,n) \tag{11,2}$$

car on peut réaliser cette condition au moyen d'une transformation linéaire de la forme $z_i=y_i+a_i\,x+b_i$, $(i=1,\dots,n)$.

1-*ère étape.* On remplace le système (11,1) par un système

$$\frac{dy_i}{dx}=G^i(x,y_1,\dots,y_n),\ (\mathrm{i}=1,\dots,n) \tag{11,3}$$

où $G^i(0,\dots,0)=0$. On prend soin de choisir les G^i d'une telle façon que l'on ait

$$|G^i(x,y_1,\dots,y_n)-G^i(x,\overline{y}_1\dots,\overline{y}_n)|\leqslant$$
$$\leqslant\sigma^i(|x|,|y_1-\overline{y}_1|,\dots,|y_n-\overline{y}_n|)$$

où les fonctions σ^i remplissent l'Hypothèse L du § 9 et que la solution effective ou approchée du système (11,3) soit plus facile à calculer.

Soient respectivement

$$y_i=\varphi_i(x),\ (i=1,\dots,n) \tag{11,4}$$
$$y_i=\psi_i(x),\ (i=1,\dots,n) \tag{11,5}$$

les intégrales du système (11,1) et (11,3) issues de l'origine des coordonnées.

2-ème étape. Nous posons

$$h^i(x, y_1, \ldots, y_n) = g^i(x, y_1, \ldots, y_n) - G^i(x, y_1, \ldots, y_n).$$

On observe que l'intégrale (11.4) remplit le système

$$\frac{dy_i}{dx} = G^i(x, y_1, \ldots, y_u) + h^i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)). \quad (11,6)$$

3-ème étape. On cherche à majorer les fonctions

$$|h^i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))|$$

c.-à-d. à trouver les fonctions $\alpha_i(x)$, telles que

$$|h^i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)| \leqslant \alpha_i(|x|) \quad (11,7)$$

A cet effet on cherche d'abord fonctions $\beta_i(x)$ qui majorent les $|\varphi_i(x)|$

$$|\varphi_i(x)| \leqslant \beta_i(|x|).$$

Une telle majoration pourra être obtenue au moyen du Théorème 7 du § 9. Ceci permettra de trouver une majoration (11,7), car

$$|h^i(x, \varphi_1(x), \ldots,)| = |h^i(x, \varphi_1(x), \ldots,) - h^i(0, 0, \ldots, 0)| =$$
$$= |x h^i_x(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) + \sum_y \varphi_j(x) h^j_{y_j}(\xi, \eta_1 \ldots, \eta_n)| \leqslant$$
$$|\leqslant M[|x| + \beta_1(|x|) + \ldots + \beta_n(|x|)]$$
$$\text{lorsque } |h^i_x| \leqslant M, |h^i_{y_j}| < M.$$

4-ème étape. On a d'après (11,4) (11,5) et (11,7)

$$\left|\frac{d}{dx}(\varphi_i(x) - \psi_i(x))\right| =$$
$$= |G^i(x, \varphi_1(x), \ldots) + h^i(x, \varphi_1(x), \ldots) - G^i(x, \psi_1(x), \ldots)| <$$
$$\leqslant \sigma^i(|x|, |\varphi_1(x) - \psi_1(x)|, \ldots, |\varphi_n(x)| - \psi_n(x)|) + \alpha_i(|x|).$$

En désignant par $u_i = \tau_i(\varrho)$ l'intégrale supérieure à droite issue de l'origine du système

$$\frac{du^i}{d\varrho} = \sigma_i(\varrho, u_1, \ldots, u_n) + \alpha_i(\varrho), \; i = 1, \ldots, n)^{*})$$

*) Ce système remplit évidemment aussi l'Hypothèse L du § 9.

on obtiendra en vertu du Théorème 7 du § 9 les inégalités

$$|\varphi^i(x) - \psi^i(x)| < \tau_i(|x|), \ (i = 1, \ldots, n)$$

qui fournissent la limitation cherchée de l'erreur.

Exemple: A titre d'exemple nous calculerons une limitation*) de l'erreur que l'on commet en remplaçant les deuxièmes membres d'un système d'équations différentielles par les termes linéaires de leur développement de Taylor et lorsque l'on considère l'intégrale du système ainsi obtenu comme l'intégrale approcheé du système primitif.

On pourrait vérifier que notre limitation est plus exacte que les limitations courantes de telle sorte.

Nous indiquerons aussi la limitation de la longueur de l'intervalle dans lequel les intégrales en question existent.

Supposons que les fonctions g^i figurant dans le système

$$\frac{dy_i}{dx} = g^i(x, y_1 \ldots, y_n), \ (i = 1, \ldots, n) \tag{11,8}$$

possèdent les dérivées partielles du second ordre continues dans l'ensemble

$$|x| < h, |y_i| < h, \ (i = 1, \ldots, n) \tag{11,9}$$

et que l'on y ait il les relations

$$|g^i_x| < A, \left|g^i_{y_j}\right| < A \text{ où } A > 0, {}^{**}) \tag{11,10}$$

$$|g^i_{xx}| < B, \left|g^i_{xy_j}\right| < B, \left|g^i_{y_j y_k}\right| < B, \tag{11,11}$$

$$g^i(0, \ldots, 0) = 0. \tag{11,12}$$

---

*) Une limitation identique de l'erreur (cf. 11,23) subsiste pour les équations différentielles dont les deuxièmes membres sont fonctions analytiques des variables complexes, lorsque les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 remplissent les inégalités (11,10) et (11,11) dans le domaine complexe (11,9). Ceci résulte de notre théorème antérieur (T. Ważewski. *Sur l'appréciation des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires et de leur domaine d'existence dans le cas des variables complexes.* Annales de la Soc Polon. de Math. T. XVI. p 104). L'exemple 3 (qui ne pas correct) du travail cité (p. 108) pourrait être remplacé par le présent exemple.

**) Dans le cas $A = 0$ on aurait $g^i \equiv 0$ et la solution de (11, 8) sertait immédiate.

Posons pour abréger

$$\overset{\circ}{g}{}^i_x = g^i_x\,(0, 0, \dots 0),\ \overset{\circ}{g}{}^i_{y_j} = g^i_{y_j}\,(0, 0, \dots, 0)$$

1-ère étape. En remplaçant dans (11, 8) les g^i par les termes linéaires de la série de Taylor nous obtenons (cf. 11,12) le système linéaire

$$\frac{d y_i}{d x} = x\,\overset{\circ}{g}{}^i_x + \sum_{j/1}^{n} y_j\,\overset{\circ}{g}{}^i_{y_j},\ (i = 1, \dots, n) \qquad (11, 13)$$

plus facile à la solution exacte ou approchée que le système (11, 8).

Ce système a la forme

$$\frac{d y_i}{d x} = G^i\,(x, y_1, \dots, y),\ (i = 1, \dots, n) \qquad (11, 14)$$

où

$$G^i = x\,\overset{\circ}{g}{}^i_x + \sum_{j/1}^{n} y_j\,\overset{\circ}{g}{}^i_{y_j},\ (i{=}1, \dots, n) \qquad (11, 15)$$

On a en vertu de (11, 10)

$$|\,G^i\,(x, y_1, \dots, y_n) - G^i\,(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)\,| \leqslant A \sum_{j/1}^{n} |\,y_j - \bar{y}_j\,|,$$

la fonction σ^i de (11, 9) a donc la forme

$$\sigma^i\,(\varrho,\ u_1, \dots, u_n) = A \sum_{j/1}^{n} u_j.$$

Désignons respectivement par

$$y_i = \varphi_i\,(x),\ (i = 1, \dots, n),\ \ (\textit{intégrale de } 11, 8) \quad (11, 16)$$

$$y_i = \psi_i\,(x),\ (i = 1, \dots, n),\ \ (\textit{intégrale de } 11, 13) \quad (11, 17)$$

les intégrales des systèmes (11, 8) et (11, 13) issues de l'origine des coordonnées

$$0 = \varphi_i\,(0) = \psi_i\,(0),\ (i = 1, \dots, n) \qquad (11, 18)$$

2-ème ètape. En posant

$$h^i\,(x,\ y_1, \dots, y_n) = g^i\,(x,\ y_1, \dots, y_n) - G^i\,(x,\ y_1, \dots, y_n)$$

nous pouvons mettre le système (11, 8) sous la forme

$$\frac{d y_i}{d x} = G^i\,(\bar{x},\ y_1, \dots, y_n) + h^i\,(x,\ y_1, \dots, y_n),\ (i = 1, \dots, n)$$

et les fonctions $\varphi_i(x)$ remplissent le système

$$\frac{dy_i}{dx}=G^i(x, y_1, \dots, y_n)+h^i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

3-ème étape. Afin de trouver les fonctions majorantes pour les $|h^i(x, \varphi_i(x), \dots, \varphi_n(x))|$ nous cherchons d'abord les fonctions majorantes pour les $|\varphi_i(x)|$. On a vertu de (11,12) et (11,10) pour les points de l'ensemble (11,9)

$$|g^i(x, y_1, \dots, y_n)|=|x g^i_x(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)+\sum_{j/1}^{n} y_j g^i_{y_j}(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)|$$

$$\leqslant A(|x|+\sum_{j/1}^{n}|y_j|).$$

Considérons le système auxiliaire remplisant l'Hypothèse L du § 9

$$\frac{du_i}{d\varrho}=A(\varrho+\sum_{j/n}^{n}u_j), \quad (i=1, \dots, n).$$

Pour l'intégrale de ce système issue de l'origine des coordonnées on aura en raison de symétrie

$$u_1=u_2=\dots=u_n=\lambda(\varrho)$$

$$\text{où} \quad \frac{d\lambda(\varrho)}{d\varrho}=A(\varrho+n\lambda).$$

On trouve

$$\lambda(\varrho)=\frac{1}{n^2A}(e^{nA\varrho}-1-nA\varrho)=\frac{1}{n^2A}\left[\frac{(nA\varrho)^2}{2!}+\frac{(nA\varrho)^3}{3!}+\dots\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}A\varrho^2 e^{nA\varrho}.$$

et pour $0 \leqslant \varrho < h$ on aura

$$\lambda(\varrho)\leqslant\frac{1}{2}A\varrho^2 e^{nAh}$$

et, par suite,

$$|\varphi_i(x)|\leqslant\frac{1}{2}A|x|^2 e^{nAh} \tag{11,19}$$

Ces intégrales existeront tant que

$$|x|\leqslant\frac{1}{2}A|x^2|e^{nAh}\leqslant h \quad \text{et} \quad |x|<h, \text{ c.-à-d. lorsque}$$

$$x| \leqslant minimum \left(h, \sqrt{\frac{2h}{A}}\, e^{-\frac{1}{2}nAh} \right) \qquad (11,20)$$

et cette inégalité fournit une *limitation de la longueur de l'intervalle dans lequel existent les intégrales* $\varphi_i(x)$.

Passons à la limitation des $|h^i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)|$.

En appliquant la formule de Taylor aux fonctions g^i nous obtiendrons en raison de (11,12), de la définition des h^i et des inégalités (11,11)

$$|h^i(x, y_1, \ldots, y_n)| = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right)^{(2)} |g^i(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)| \leqslant$$
$$\frac{1}{2} B(|x| + \sum_{j=1}^{n} |y_j|)^2$$

et par suite (cf. 11,19)

$$|h^i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))| \leqslant \frac{1}{2} B \left(1 + \frac{n}{2} A |x| e^{nAh}\right)^2 |x|^2$$

En posant

$$C = \frac{1}{2} B \left(1 + \frac{n}{2} A h e^{nAh}\right)^2 \qquad (11,21)$$

on obtient

$$|h^i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \leqslant C|x|^2 \qquad (11,22)$$

4-ème étape. On a

$$\left|\frac{d(\varphi_i(x) - \psi_i(x))}{dx}\right| = \left|G^i(x, \varphi_1(x), \ldots,) + h^i(x, \varphi_1(x), \ldots) -\right.$$
$$- G^i(x, \psi_1(x), \ldots)| = |\sum_{j=1,}^{n} g^i_{y_j} \cdot (\varphi_j(x) - \psi_j(x)) +$$
$$+ h^i(x, \varphi_1(x), \ldots)|$$

d'où, en raison de (11,10) et (11,22), il s'ensuit que

$$\left|\frac{d(\varphi_i(x) - \psi_i(x))}{dx}\right| \leqslant A \sum_{j=1,}^{n} |\varphi_j(x) - \psi_j(x)| + C|x|^2.$$

Afin de majorer $|\varphi_i(x) - \psi_i(x)|$ nous introduisons le système suivant remplissant l'hypothèse L du § 9

$$\frac{dv^i}{d\varrho} = A \sum_{j=1}^{n} v_j + C\varrho^2$$

et. comme $\varphi_i(0) - \psi_i(0) = 0$ (cf, 11,8), il suffira de trouver l'intégrale de ce système issue de l'origine et d'appliquer le Théorème 7 du § 9. Or, en raison de symétrie, on aura, pour cette intégrale $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = \alpha(\varrho)$ où

$$\frac{d\alpha}{d\varrho} = n A \alpha + C \varrho^2$$

L'intégrale de cette équation, pour laquelle $\alpha(0) = 0$ sera

$$\alpha(\varrho) = \frac{2C}{(nA)^3}\left(C^{nA\varrho} - 1 - \frac{nA\varrho}{1!} - \frac{(nA\varrho)^2}{2!}\right).$$

En développant $e^{nA\varrho}$ en série, on parvient facilement à l'inégalité

$$\alpha(\varrho) \leqslant \frac{C}{3} \varrho^3 e^{nA\varrho}.$$

En appliquant le Théorème 7 du § 9 on en déduira facilement la limitation cherchée de l'erreur

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| \leqslant \frac{C}{3} |x|^3 c^{nA|x|} \qquad (11,23)$$

où C a la forme (11,21).

SUR LES INTÉGRALES PREMIÈRES DE L'ÉQUATION $y' = f(x, y)$

Par

Z. SZMYDTÓWNA (Kraków).

Introduction.

Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

définie dans un ensemble ouvert E.

Une fonction $z(x,y)$ sera dite l'intégrale première non banale de l'équation (1) dans un sous-ensemble ouvert E_1 de E lorsqu'elle:

1) possède dans E_1 des derivées partielles continues du prémier ordre,

2) est constante le long de chaque intégrale de l'équation (1),

3) $z_y(x,y) \neq 0$ dans E_1.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $z(x,y)$ soit l'intégrale première non banale de l'équation (1) dans E_1 est qu'elle soit intégrale de l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

et qu'elle possède une derivée partielle par rapport à y différente de 0 dans l'ensemble envisagé [1]). Par l'intégrale de

---

[1]) E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig 1930), p. 298 et 299.

l'équation (2) dans l'ensemble E_1 j'entend ici, selon l'usage général, une fonction $z(x,y)$ de classe C^1 dans E_1[2]) et qui y satisfait à l'équation (2).

M. Kamke a démontré quelques théorèmes sur l'existence des intégrales premières de l'équation (1) dans un ensemble donné d'avance. Je vais rappeler l'un d'eux[3]):

Soit $f(x,y)$ une fonction continue et possédant la dérivée partielle $f_y(x,y)$ continue dans un domaine simplement connexe Ω. Cela posé, dans chaque domaine H borné et contenu avec sa frontière dans le domaine Ω, il existe une intégrale $z(x,y)$ de l'équation (2) pour laquelle $z_y(x,y) > 0$ dans chaque point du domaine H.

Or, dans le domaine Ω tout entier, l'intégrale première non banale de l'équation (1) peut ne pas exister, comme le montre le théorème suivant de M. Ważewski[4]):

Il existe un domaine ouvert et simplement connexe Ω et une fonction $f(x,y)$ possédant dans Ω des dérivées partielles continues de tous les ordres, tels que toute intégrale de (2) valable dans Ω tout entier est forcément constante.

M. Szarski[5]) a demontré ensuite que l'on peut remplacer dans le théorème de M. Ważewski l'ensemble Ω, dont la structure était bien compliquée, par un carré ouvert arbitraire ou par le plan tout entier.

---

[2]) Une fonction $f(x,y)$ définie dans un ensemble E est appelée fonction de classe C^n lorsqu'elle possède des dérivées partielles continues de l'ordre n dans l'ensemble E. Elle sera appelée fonction de classe C^∞, si elle possède dans l'ensemble envisagé des dérivées partielles continues de tous les ordres.

[3]) E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig 1930), p. 316, Satz 5.

[4]) T. Ważewski: „Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation: $\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$" Mathematica, Vol. VIII, (1933), p. 103—116.

[5]) J. Szarski: „Sur un problème de caractère intégral relatif à l'équation $\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$" Ann. Soc. Pol. Math. vol. XIX, (1946), p. 106—132.

M. W a-ż e w s k i m'a proposé d'examiner le problème d'existence des intégrales premières non banales de l'équation (1) de classe $C^n (n \geqslant 2)$ valables dans un domaine ouvert et simplement connexe. Or j'ai obtenu à ce sujet le théorème suivant:

Théorème. *Pour chaque n naturel, égal au moins à 2, on peut construire un domaine ouvert, simplement connexe Ω_n et une fonction $f_n(x,y)$ de classe C^∞ dans cet ensemble de sorte qu'il existe une intégrale première non banale de classe C^{n-1} de l'équation*

$$y' = f_n(x, y)$$

valable dans Ω_n tout entier, tandis qu'une intégrale non banale de classe C^n valable dans Ω_n n'existe point. Plus précisément, chaque intégrale de classe C^n de l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f_n(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

valable dans Ω_n tout entier est forcément constante.

I. Je laisse de côté le cas $n=1$, car il conduit au théorème de M. W a ż e w s k i.

II. La démonstration sera effectuée en plusieurs étapes. Nous introduirons à cet effet quelques définitions et nous démontrerons quelques lemmes préliminaires. Pour simplifier l'écriture je vais désigner l'ensemble Ω_n et la fonction $f_n(x,y)$ intervenant dans l'énoncé de notre théorème par Ω et $f(x,y)$.

Supposons que $f(x,y)$ soit définie dans un ensemble ouvert Ω et que $(x_0,y_0) \epsilon E \subset \Omega$.

Définition 1 [6]. Nous dirons que le point (x_0,y_0) est „horizontal de classe C^n" par rapport à l'ensemble E et à l'équation (2), lorsque — pour toute intégrale $z(x,y)$ de classe C^n de (2) valable dans E — on aura

$$z_y(x_0,y_0) = 0 .$$

---

[6]) Cette définition a été introduite par M. W a ż e w s k i pour le cas $n=1$ (voir la note 4 en bas de la page).

En vertu de l'équation (2) on aura alors aussi

$$z_x(x_0,y_0) = 0 .$$

De cette définition il résulte immédiatement le lemme suivant:

Lemme 1: Si le point (x_0,y_0)

$$(x_0,y_0) \in E_1 \subset E \subset \Omega$$

est horizontal de classe C^n par rapport à l'ensemble E_1 et à l'équation (2) il l'est aussi par rapport à l'ensemble E et à l'équation (2).

III. On sait que l'équation (1) est l'équation des caractéristiques de (2).

Définition 2. La caractéristique de l'équation (2) sera dite caractéristique horizontale de classe C^n par rapport à l'ensemble E et à l'équation (2) lorsque chacun de ses points est horizontal de classe C^n par rapport à E et à l'équation (2).

Lemme 2[7]. Soit $f(x,y)$ une fonction de classe C^1 dans Ω. La caractéristique de l'équation (2) issue du point (x_0,y_0) et située dans l'ensemble ouvert $E \subset \Omega$ est horizontale de classe C^n par rapport à l'ensemble E et à l'équation (2) à condition que le point (x_0,y_0) soit un point horizontal au même sens.

Lemme 3. Désignons (voir la figure 1) par Q le carré

$$Q \begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \alpha + h \\ \beta < y < \beta + h , \end{cases}$$

par Π_1 le rectangle

$$\Pi_1 \begin{cases} \alpha - h \leqslant x \leqslant \alpha \\ \beta - h < y < \beta + 2h , \end{cases}$$

---

[7]) Quant à la démonstration voir le lemme 2 du travail cité dans la note 5) en bas de la page.

par Π_2 le rectangle

$$\Pi_2 \left\{ \begin{array}{l} \alpha + h \leqslant x < \alpha + 2h \\ \beta - h < y < \beta + 2h \ , \end{array} \right.$$

et enfin par Π le polygone

$$\Pi = \Pi_1 + Q + \Pi_2 \ .$$

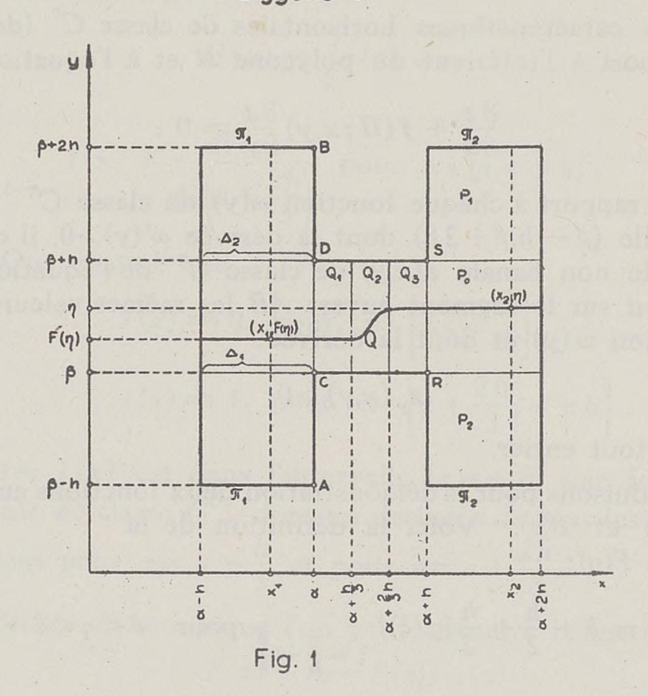


Fig. 1

Il est important de remarquer que le polygone Π n'est ni ouvert ni fermé. On l'obtient du polygone fermé en supprimant les côtés fermés parallèles à l'axe OX.

Divisons le carré Q en trois rectangles Q_1, Q_2, Q_3:

$$Q_j \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \dfrac{j-1}{3}\, h < x < \alpha + \dfrac{j}{3}\, h \qquad (j = 1, 2, 3) \\ \beta < y < \beta + h \ . \end{array} \right. \tag{3}$$

Nous affirmons qu'il existe une fonction $f(\Pi;x,y)$ définie dans le polygone Π égale à 0 aux points de $\Pi_1 + Q_1 + Q_3 + \Pi_2$ et jouissant des propriétés suivantes:

w_1) $f(\Pi;x,y)$ est de classe C^∞ dans Π.

w_2) Les lignes Δ_1 et Δ_2

$$\Delta_1 \begin{cases} \alpha - h < x < \alpha \\ y = \beta \end{cases}, \qquad \Delta_2 \begin{cases} \alpha - h < x < \alpha \\ y = \beta + h \end{cases}$$

sont des caractéristiques horizontales de classe C^n (def. 2) par rapport à l'intérieur du polygone Π et à l'équation:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(\Pi;x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,. \tag{4}$$

w_3) Par rapport à chaque fonction $\omega(y)$ de classe C^{n-1} dans l'intervalle $(\beta - h, \beta + 2h)$ dont la dérivée $\omega'(y) > 0$, il existe l'intégrale non banale $z(x,y)$ de classe C^{n-1} de l'équation (4) admettant sur le segment ouvert AB les mêmes valeurs que la fonction $\omega(y)$ et dont la dérivée

$$z_y(x,y) > 0$$

dans Π tout entier.

Introduisons pour la démonstration deux fonctions auxiliaires $F(\eta)$ et $\lambda(x)$. Voici la définition de la fonction $F(\eta)$:

$$F(\eta) = \beta + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}[g(\xi)]_{\xi = \frac{\eta}{h} - \frac{\beta}{h}} \quad \text{pour} \quad \beta \leqslant \eta \leqslant \beta + h$$

où

$$g(\xi) = \xi^{n-\frac{1}{2}} - (1-\xi)^{n-\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

1. On vérifie facilement que la fonction $F(\eta)$ qui transforme l'intervalle $[\beta, \beta + h]$ en luimême est de classe C^∞ dans l'intervalle $(\beta, \beta + h)$, de classe C^{n-1} dans $[\beta, \beta + h]$ et ne possède pas de derivée finie d'ordre n pour $\eta = \beta$ et $\eta = \beta + h$. En outre $F'(\eta) > 0$ pour $\beta \leqslant \eta \leqslant \beta + h$.

Avant de définir la fonction $\lambda(x)$ introduisons d'abord la fonction $\tau(x)$

$$\tau(x) \underset{def}{=} e^{-\frac{1}{\left(x-\alpha-\frac{h}{3}\right)^2}-\frac{1}{\left(x-\alpha-\frac{2h}{3}\right)^2}} \quad \text{pour } \alpha+\frac{h}{3}<x<\alpha+\frac{2h}{3},$$

$$\tau(x) \underset{def}{\equiv} 0 \quad \text{pour} \quad x \in \left[\alpha, \alpha+\frac{h}{3}\right] \text{ et pour } x \in \left[\alpha+\frac{2h}{3}, \alpha+h\right].$$

Désignons par $G(x)$

$$G(x) = \int_\alpha^x \tau(x)\, dx$$

et soit

$$\lambda(x) = \frac{G(x)}{G\left(\alpha+\frac{2h}{3}\right)} \quad \text{pour} \quad x \in [\alpha, \alpha+h] .$$

2. On constate que

$$\lambda(x) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad x \in \left[\alpha, \alpha+\frac{h}{3}\right],$$

$$\lambda(x) \equiv 1 \quad \text{pour} \quad x \in \left[\alpha+\frac{2h}{3}, \alpha+h\right].$$

En outre $\lambda(x)$ est dans l'intervalle $[\alpha, \alpha+h]$ une fonction croissante de classe C^∞, dont les derivées de tous les ordres s'annulent pour $x=\alpha+\frac{h}{3}$ et pour $x=\alpha+\frac{2h}{3}$.

3. Nous affirmons que l'on peut résoudre l'équation

$$y = F(\eta) + [\eta - F(\eta)]\, \lambda(x) \tag{5}$$

par rapport à η dans l'ensemble Γ défini par les inégalités

$$\Gamma \begin{cases} \alpha < x < \alpha + h, \\ \beta < y < \beta + h, \\ \beta < \eta < \beta + h. \end{cases}$$

Pour la démonstration supposons que les deux points (x_1, y_1, η_1), (x_2, y_2, η_2) appartiennent à l'ensemble Γ, satisfassent à l'équation (5) et que $\eta_1 \neq \eta_2$. Il suffit d'établir que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Si

$x_1 \neq x_2$, le théorème est démontré, sinon nous avons les relations

$$y_1 = F(\eta_1)[1-\lambda(x_1)]+\eta_1$$
$$y_2 = F(\eta_2)[1-\lambda(x_1)]+\eta_2 .$$

Comme $1-\lambda(x_1) \geqslant 0$ et la fonction $F(\eta)$ est croissante au sens stricte (cf. 1) il s'ensuit de ces dernières relations que $y_1 \neq y_2$.

4. La fonction

$$\eta = \chi(x, y)$$

que l'on obtient en résolvant l'équation (5) par rapport à η est, d'après le théorème sur les fonctions implicites, de classe C^∞ en particulier dans le rectangle Q_2 (cf. la relation (3)).

5. Posons

$$f(\Pi; x, y) = \{\chi(x, y) - F[\chi(x, y)\}\lambda'(x) \tag{6}$$

pour $(x, y) \in Q_2$.

En vertu des propriétés de la fonction $\lambda(x)$, la fonction (6) s'annule avec ses dérivées partielles de tous les ordres pour $x = \alpha + \frac{h}{3}$ et pour $x = \alpha + \frac{2h}{3}$. Il s'ensuit que la fonction $f(\Pi; x, y)$ jouit de la propriété w_1).

6. Comme $f(\Pi; x, y)$ s'annule dans Q_1 et Q_3 les équations (5) nous donnent d'après la définition de $f(\Pi; x, y)$ dans Q_2 des caractéristiques de l'équation (4) pour les $x \in [\alpha, \alpha+h]$.

7. Chaque caractéristique de l'équation (4) issue d'un point intérieur du segment RS atteint aussi le segment CD dans un point intérieur. En prolongeant ces caractéristiques dans les intervalles $[\alpha-h, \alpha]$ et $[\alpha+h, \alpha+2h]$ on obtient des segments parallèles à l'axe OX, car la fonction $f(\Pi; x, y)$ s'annule dans les rectangles Π_1 et Π_2.

8. Je me borne à donner la démonstration de la propriété w_2) respectivement à la caractéristique Δ_1, car pour Δ_2 elle est tout à fait analogue.

Supposons pour la démonstration par l'impossible qu'il existe une intégrale $z(x,y)$ de classe C^n de l'équation (4) telle que pour un certain $x_1 \epsilon (\alpha - h, \alpha)$ on ait

$$z_y(x_1, \beta) \neq 0 . \tag{7}$$

Soit x_2 un point arbitraire, mais fixe, situé dans l'intervalle $(\alpha+h, \alpha+2h)$. La relation

$$z(x_1, F(\eta)) - z(x_2, \eta) = 0$$

étant valable[8]) pour $\beta < \eta < \beta + h$ on obtient à la limite

$$z(x_1, \beta) - z(x_2, \beta) = 0 \tag{8}$$

car $F(\beta) = \beta$.

En vertu des relations (7) et (8) on peut résoudre l'équation

$$z(x_1, y) - z(x_2, \eta) = 0$$

par rapport à y dans le voisinage du point (β, β). La fonction $y = \Sigma(\eta)$ ainsi obtenue étant unique et de classe C^n dans le voisinage du point β, la dérivée $F^{(n)}(\beta)$ doit être aussi finie ce qui contredit à une propriété de la fonction $F(\eta)$ (cf. 1.).

La propriété w_2) est ainsi démontrée.

9. Pour la démonstration de la propriété w_3) désignons par P_0, P_1, P_2 les carrés:

$$P_0 \begin{cases} \alpha+h \leqslant x \leqslant \alpha+2h \\ \beta < y < \beta+h \end{cases}, P_1 \begin{cases} \alpha+h \leqslant x \leqslant \alpha+2h \\ \beta+h \leqslant y < \beta+2h \end{cases}, P_2 \begin{cases} \alpha+h \leqslant x \leqslant \alpha+2h \\ \beta-h < y \leqslant \beta. \end{cases}$$

Soit $\varphi(x; \xi, \eta)$ la caractéristique de l'équation (4) issue du point (ξ, η). En particulier

$$\varphi(x_1; x, y) = y \text{ dans } \Pi_1 + Q_1 ,$$
$$\varphi(x_1; x, y) = F(y) \text{ dans } Q_3 + P_0 .$$

D'après un théorème de Bendixson[9]), la fonction

$$\psi(x, y) = \varphi(x_1; x, y)$$

---

[8]) Voir la note 1) en bas de la page.

[9]) E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen (Leipzig 1930), p. 155, Satz 1.

est une intégrale de l'équation (4) dans l'intérieur de l'ensemble $\Pi_1 + Q + P_0$, dont la derivée par rapport à y est positive. La fonction $f(\Pi;x,y)$ étant de classe C^∞ (propriété w_1), il résulte du théorème sur la différentiation des fonctions caractéristiques [10]) que $\psi(x,y)$ l'est aussi. La fonction $z(x,y)$ définie par des relations:

$$\begin{aligned} z(x,y) &= \omega[\psi(x,y)] && \text{à l'intérieur de } \Pi_1 + Q + P_0 \,, \\ z(x,y) &= \omega(y) && \text{sur les côtés verticales de } \Pi_1 \,, \\ z(x,y) &= \omega[F(y)] && \text{sur les côtés verticales de } P_0 \,. \end{aligned}$$

est une intégrale de classe C^{n-1} de l'équation (4), qui jouit des propriétés suivantes:

1) $z(x,y) = \omega(y)$ sur le segment AB ,

2) $z(x,y) = \omega[F(y)]$ dans le carré P_0 ,

3) $z_y(x,y) > 0$ dans $\Pi_1 + Q + P_0$,

4) il existe les limites finies c_ν et d_ν

$$\left.\begin{aligned} \lim_{y\to\beta+0} \frac{\partial^\nu z(x,y)}{\partial y^\nu} &= c_\nu \\ \lim_{y\to\beta+h-0} \frac{\partial^\nu z(x,y)}{\partial y^\nu} &= d_\nu \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\nu = 0, 1, \ldots, n-1 \,, \\ &a + h \leqslant x \leqslant a + 2h \,, \end{aligned}$$

avec $c_1 > 0$ et $d_1 > 0$.

Soit

$$\sigma(y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{c_\nu}{\nu!} (y-\beta)^\nu \text{ pour } \beta - h < y \leqslant \beta \,.$$

Si $\dfrac{d\sigma(y)}{dy} > 0$ dans l'intervalle $[\beta-h, \beta]$ je pose tout simplement

$$z(x,y) = \sigma(y) \text{ dans } P_2$$

sinon, il y a dans cet intervalle la plus grande racine y_0 de l'équation $\dfrac{d\sigma(y)}{dy} = 0$. Choisissons le nombre k de façon que

---

[10]) E. Kamke: Diff. reeller Funktionen p. 166, Satz 4.

$$k e^{-\frac{1}{(y_0-\beta)^2}} > |m|$$

où

$$m = min \frac{d\sigma(y)}{dy} \text{ pour } \beta - h \leqslant x \leqslant \beta .$$

Soit

$$u(y) = \begin{cases} 0 \text{ pour } y = \beta, \\ k e^{-\frac{1}{(y-\beta)^2}} \text{ pour } \beta - h < y < \beta. \end{cases}$$

Je pose par définition

$$z(x,y) = \sigma(y) + \int_\beta^y u(y)\, d\, y \text{ pour } (x, y) \in P_2.$$

On voit immédiatement que $z_y(x,y) > 0$ aux points de P_2. La définition de la fonction $z(x,y)$ dans P_1 se fait d'une manière analogue.

On parvient ainsi à une intégrale $z(x,y)$ de classe C^{n-1} de l'équation (4) qui admet sur le segment AB les mêmes valeurs que la fonction $\omega(y)$ et possède la dérivée

$$z_y(x,y) > 0$$

dans le polygone Π tout entier.

Notre lemme est donc démontré

IV. Passons maintenant à la démonstration du théorème même.

1*. Nous nous servirons d'une suite de polygones W_p aux côtés parallèles aux axes de coordonnées, d'une suite des fonctions $f(W_p;x,y)$ et des équations différentielles (R_p)

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(W_p;x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (R_p)$$

qui possèdent les propriétés suivantes:

α_p) $f(W_p;x,y)$ est de classe C^∞ dans W_p,

β_p) Pour un point quelconque M situé à l'intérieur de W_p il se présente au moins une des circonstances suivantes:

1) M est un point horizontal de classe C^n par rapport à W_p et à l'équation (R_p), ou bien

2) la caractéristique de cette équation issue du point M se laisse prolonger vers la droite jusqu'à ce qu'elle

rencontre le côté vertical du polygone W_p en un point $C(x_0, c)$ qui n'est pas un sommet de W_p. Il existe donc des nombres $k > 0$, $l > 0$,[11]) tels que le rectangle σ (fig. 2)

$$\sigma \begin{cases} x_0 - k \leqslant x \leqslant x_0 \\ \quad a < y < b \end{cases}$$

$$\sigma \subset W_p \text{ et } f(W_p; x,y) = 0 \quad \text{dans } \sigma,$$

tandis que polygone τ

$$\tau \begin{cases} x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + l \\ a < y < b \end{cases}$$

n'a pas de points communs avec l'intérieur de W_p.

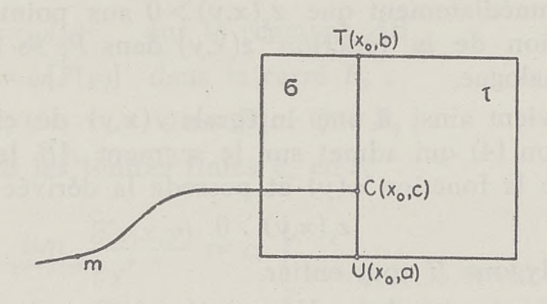


Fig. 2

γ_p) Il existe au moins une intégrale première non banale $z(W_p; x,y)$ de classe C^{n-1} de l'équation

$$y' = f(W_p; x,y) \tag{S_p}$$

pour laquelle $Z_y(W_p; x,y) > 0$ dans W_p tout entier.

Si $p > 1$ on a:

δ_p) $W_{p-1} \subset W_p \qquad f(W_p; x,y) = f(W_{p-1}; x,y) \quad$ dans W_{p-1},

ε_p) $z(W_p; x,y) = z(W_{p-1}; x,y) \quad$ dans W_{p-1},

η_p) tout cercle de rayon $\frac{1}{p-1}$ et de centre situé à l'intérieur

---

[11]) Les nombres x_0, c, a, b, k, l dépendent du polygone W_p et du choix du point M. Afin d'être plus rigoureux il faudrait donc écrire x_0 (M, W_p), ..., (M, W_p).

de W_{p-1} contient au moins un point horizontal de classe C^n par rapport à W_p et à l'équation (R_p).

L'existence des suites W_p, $f(W_p; x,y)$ va être demontrée par recurrence. Nous prenons comme W_1 un réctangle (arbitraire du reste) aux côtés parallèles aux axes des coordonnées et nous posons

$$f(W_1; x,y) \equiv 0 \qquad \text{dans } W_1,$$
$$z(W_1; x,y) = y \qquad \text{dans } W_1.$$

Les propriétés $\alpha_1)$, $\beta_1)$ $\gamma_1)$ sont ainsi vérifiées.

Supposons que pour un polygone W_p et une fonction $f(W_p;x,y)$ les propriétés $\alpha_p) \ldots, \eta_p)$ subsistent. Nous affirmons qu'il existe un polygone W_{p+1} et une fonction $f(W_{p+1};x,y)$ pour lesquels subsistent des propriétés $\alpha_{p+1}), \ldots, \eta_{p+1})$.

Le polygone W_p peut être couvert par un nombre fini de cercles de rayon $\frac{1}{p}$ et dont les centres sont des points intérieurs de W_p. Soient

$$M_1^p,\ M_2^p, \ldots,\ M_{r_p}^p \qquad (9)$$

les centres de ces cercles. Je vais étendre la définition de la fonction $f(W_p;x,y)$ aux points du polygone plus large W_{p+1} de façon que les propriétés $\alpha_{p+1}), \ldots, \varepsilon_{p+1})$ subsistent et que les points (9) deviennent horizontaux de classe C^n par rapport à W_{p+1} et à l'équation (R_{p+1}). La propriété $\eta_{p+1})$ sera aussi remplie en vertu de la façon dont on a choisi les points (9).

Si M_1^p est horizontal par rapport à l'intégrale de classe C^n de l'équation (R_p) je pose

$$W_{p+1}^1 = W_p \quad \text{et} \quad f(W_{p+1}^1; x,y) = f(W_p;x,y)$$

sinon, la caractéristique de l'équation (R_p) coupe un côté

droit de W_p (propriété β_p) et on peut construire le polygone Π du lemme 3 de sorte que (fig. 3)

$$\Pi_1 \subset \sigma,$$
$$Q + \Pi_2 \subset \tau.$$

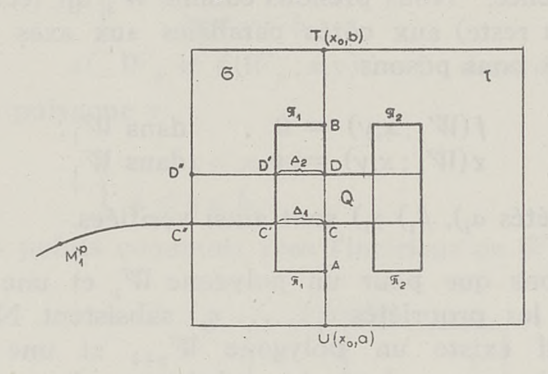


Fig 3

Posons

$$W^1_{p+1} = W_p + \Pi$$

La fonction

$$f(W^1_{p+1};x,y) = \begin{cases} f(W_p;x,y) & \text{dans } W_p \\ f(\Pi;x,y) & \text{dans } \Pi^{12)} \end{cases} \tag{10}$$

est de classe C^∞ dans W_{p+1} et les segments $\Delta_1(CC')$ et $\Delta_2(DD')$ sont des caractéristiques horizontales par rapport au polygone Π et à l'intégrale de classe C^n de l'équation (4) (lemme 3). Il résulte de la définition (10) et des lemmes 1 et 2, que les caractéristiques CC' et DD' tant qu'elles existent à l'interieur de W^1_{p+1} sont horizontales de classe C^n par rapport à l'équation:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(W^1_{p+1};x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{11}$$

En particulier le point M_1^p est horizontal par rapport à l'intérieur de W^1_{p+1} et à l'intégrale de classe C^n de (11).

[12]) Quant à la définition de la fonction $f(\Pi;x,y)$ voir le lemme 3.

Le lemme 3 assure en plus l'existence de l'intégrale $z(x, y)$ de classe C^{n-1} de l'équation (11), telle que

$$z_y(x, y) > 0 \quad \text{dans } W^1_{p+1} .$$

Le rôle de la fonction $\omega(y)$ du lemme 3 est joué maintenant par la fonction $z(W_p ; x_0, y)$ (fig. 3).

Les remarques faites ci-dessus montrent que les propriétés $\alpha_{p+1}), \ldots, \varepsilon_{p+1})$ subsistent à condition d'y remplacer W_{p+1} par W^1_{p+1}. En appliquant de nouveau le même procédé nous étendons de proche en proche la définition de la fonction $f(W^1_{p+1}; x,y)$ aux points d'un polygone $W_{p+1} = W^{r_p}_{p+1}$ de sorte que les propriétés $\alpha_{p+1}), \ldots, \varepsilon_{p+1})$ soient verifiées et que les points (9) deviennent horizontaux de classe C^n par rapport à W_{p+1} et à l'équation (R_{p+1}) (lemme 1 et 2).

L'existence des suites $\{W_p\}$ et $\{R_p\}$ est ainsi demontrée 2*). Désignons par Ω la somme de la suite croissante (propriété δ_p) des polygones ouverts W_p. Ω est donc un domaine simplement connexe. Soit (x,y) un point arbitraire de Ω. Posons

$$f(x,y) = f(W_k; x,y) \tag{12}$$

où W_k est le premier polygone de la suite $\{W_p\}$ qui contient le point (x,y). En rapprochant les propriétés $\alpha_p)$ et $\delta_p)$ on constate facilement que la fonction $f(x,y)$ possède dans Ω des dérivées partielles continues de tous les ordres. Les points rentrant dans la suite infinie:

$$M^1_1, \ldots, M^1_{r_1}, M^2_1, \ldots, M^2_{r_2}, \ldots$$

forment un ensemble partout dense sur Ω des points horizontaux par rapport à Ω et à l'intégrale de classe C^n de l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x.y) \frac{\partial z}{\partial v} = 0, \tag{13}$$

ce qui résulte immédiatement de notre construction lorsqu'on tient compte du lemme 1 et de l'égalité (12).

Soit $\varphi(x,y)$ une intégrale de l'équation (13), valable et de classe C^n dans Ω. Ses dérivées $\varphi_x(x,y)$ et $\varphi_y(x,y)$ sont continues. On a donc

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_x(x,y) \equiv 0 \\ \varphi_y(x,y) \equiv 0\end{array}\right\} \text{ dans } \Omega .$$

Comme Ω est un domaine il en résulte que la fonction $\varphi(x,y)$ est constante. En même temps la propriété γ_p) nous assure l'existence de l'intégrale $z(x,y)$ de classe C^{n-1} de (13) dont la dérivée $z_y(x,y) > 0$ dans Ω tout entier.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ENSEMBLES PLANS DE DIAMÉTRE TRANSFINI NUL

Par

ROMAN LEITNER (Kraków)

Soit F un ensemble infini, fermé et borné des points du plan. Considérons dans F un système de $n \geqslant 2$ points

(1) $$\eta_1^{(n)},\ \eta_2^{(n)}, \ldots,\ \eta_n^{(n)}$$

distribués dans F de maniére que le produit de toutes leurs distances mutuelles

(2) $$V(\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} |\eta_j^{(n)} - \eta_k^{(n)}|$$

remplisse la condition

(3) $$V(\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}) = \max_{(F)} V(z_1, \ldots, z_n)\ ,$$

où $\max\limits_{(F)} V$ désigne le maximum de la fonction V lorsque les points $z_1, \ldots, z_n$ varient dans l'ensemble F (ce maximum est atteint car F est un ensemble fermé). Nous dirons que les points (1) forment un *système extrémal du rang n* de l'ensemble F. Il est bien connu que la suite

(4) $$\sqrt[\binom{n}{2}]{V(\eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)})}$$

est toujours convergente vers une limite $d(F)$ dite *diamètre transfini* de F.

Formons la nouvelle suite

(5) $$H_n(z) = \sqrt[n]{|z - \eta_1^{(n)}| \ldots |z - \eta_n^{(n)}|}$$

où z est un point quelconque du plan. M. F. Leja a démontré[1]) que:

[1]) Ann. Soc. Pol. de Math., t. XIV (1935). p. 131—134.

1° lorsque $d(F) > 0$ la suite (5) tend en dehors de F vers une fonction limite [2]),

2° lorsque $d(F) = 0$ la suite (5) est aussi convergente en dehors de F à condition que F n'ait qu'un seul point d'accumulation [3]).

Le but de ce travail est de démontrer que dans le cas $d(F) = 0$ la dernière condition est essentielle. Nous allons notamment démontrer ce que voici :

Théorème. *Il existe un ensemble F borné, fermé, ne possedant que deux points d'accumulation*[4]) *et tel que la limite de la suite* (5) *n'existe pas en général.*

La démonstration se compose de trois parties: Dans le § 1 nous allons formuler quelques propriétés d'un ensemble borné, formé, ne possedant que deux points d'accumulation: 0 et 1.

Dans le § 2 nous prouvons que, s'il existe un ensemble F jouissant de ces propriétés, la suite (5) correspondante à cet ensemble ne converge pas en général en dehors de F.

Le § 3 est consacré à la construction d'un ensemble jouissant des propriétés specifiées dans le § 1.

§ 1.

Soit F la somme d'une suite infinie d'ensembles E_i,

$$F = \sum_{i/1}^{\infty} E_i$$

jouissant des propriétés suivantes:

---

[2]) En désignant par D le domaine infini situé dans l'ensemble complémentaire à F et par Δ l'ensemble ouvert complémentaire au domaine fermé D, M. F. Leja a prouvé que dans $D + \Delta$ on a

$$\lim_{n/\infty} H_n(z) = d(F) \cdot e^{G(z)}$$

où dans D $G(z)$ est la fonction de Green de ce domaine avec le pôle à l'infini et dans Δ, si cet ensemble n'est pas vide, $G(z) = 0$, (v. Ann. Soc. Polon. de Math., t. XVIII (1945), p. 4—11.

[3]) La fonction $\lim_{n/\infty} H_n(z)$ est dans ce cas égale à $|z - z_0|$, où z_0 est le point d'accumulation de F.

[4]) On sait que le diamètre transfini d'un tel ensemble est égàl à zéro

Propriété 1. L'ensemble E_1 est composé des deux points $z=0$ et $z=1$. Chaque E_i est un ensemble fini, non vide.

Définition 1. N_i désigne le nombre d'éléments de l'ensemble E_i.

Propriété 2. Les ensembles E_i et E_j sont disjoints pour $i \neq j$.

Définition 2. Soit G_s l'ensemble $\sum_{i/1}^{s} E_i$ et M_s le nombre d'éléments de G_s, donc $M_s = \sum_{i/1}^{s} N_i$.

Définition 3. E étant un ensemble fini quelconque contenant au moins deux points désignons par $V(E)$ le produit de toutes les distances mutuelles des points de E.

Propriété 3. Les points de l'ensemble G_s forment l'unique système extrémal de rang M_s de l'ensemble F, c'est-à-dire les ensembles E_{s+1}, E_{s+2} ... sont définis de façon que: $V(G_s) > V(\overline{G}_s)$ pour tout ensemble $\overline{G}_s$ différent de G_s, composé de M_s points de F.

Définition 4. Soit α_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, une suite de nombres positifs tels que:

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_i > \alpha_{i+1},\ \alpha_i \to 0$$

Propriété 4. Les points z de l'ensemble E_i satisfont à l'inégalité:

$$|z-0| \leqslant \alpha_i, \text{ lorsque } i = 2k,\ k=1, 2, 3, \ldots$$

et à l'inégalité

$$|z-1| \leqslant \alpha_i, \text{ lorsque } i = 2k+1,\ k=1, 2, 3, \ldots .$$

Définition 5. Soit β_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, une suite de nombres tels que:

$$0 < \beta_i < 1,\ \beta_i \to 1$$

Propriété 5. Le nombre d'éléments de l'ensemble E_i satisfait aux inégalités:

$$\beta_i \leqslant \frac{N_i}{M_i} \leqslant 1 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \ldots$$

Remarque. Observons que, s'il existe un ensemble F jouissant de ces propriétés, il est infini, borné, fermé et ne possède que deux points d'accumulation.

§ 2.

Lemme 1. Supposons qu'il existe un ensemble F jouissant des propriétés 1—5, formons la suite (5) correspondante à cet ensemble et considérons deux suites partielles de la suite (5) correspondantes à $n = M_{2k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, respectivement à $n = M_{2k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Nous affirmons que ces suites partielles convergent, en dehors de F, respectivement vers les limites $|z|$ et $|z-1|$.

Démonstration. Soit z un point fixe quelconque n'appartenant pas à F. Posons $a = |z|$, $h = |z-1|$. On a $a > 0, h > 0$. En vertu de la définition 4 il existe un nombre naturel impair m tel que $a - \alpha_m > 0$, $h - \alpha_m > 0$.

Définition 6. L'ensemble E étant fini désignons par $W(z, E)$ le produit de toutes distances $|z - \zeta|$, où ζ parcourt E.

Remarque: Les ensembles E' et E'' étant disjons, on a

$$W(z, E' + E'') = W(z, E') . \ W(z, E'')$$

Pour les indices s, où $s < m$, nous avons, selon les propriétés 1 et 2, la relation:

$$W(z, G_s) = W(z, G_m) . \ W(z, \sum_{i/m+1}^{s-1} E_i) . \ W(z, E_s) \tag{6}$$

D'après la propriété 4 on a:

$$\begin{aligned} (a - \alpha_i)^{N_i} &\leqslant W(z, E_i) \leqslant (a + \alpha_i)^{N_i} \text{ pour i pairs,} \\ (b - \alpha_i)^{N_i} &\leqslant W(z, E_i) \leqslant (b + \alpha_i)^{N_i} \text{ pour i impairs.} \end{aligned} \tag{7}$$

En vertu de la déf. 4 nous avons, pour $i > m$, les inégalités:

$$a - \alpha_m < a - \alpha_i \quad , \quad a + \alpha_i < a + \alpha_m$$
$$b - \alpha_m < b - \alpha_i \quad , \quad b + \alpha_i < b + \alpha_m$$

d'où

$$(8)\quad \begin{array}{ll} (a-\alpha_m)^{N_i} \leqslant W(z, E_i) \leqslant (a+\alpha_m)^{N_i} & \text{pour i pairs,} \\ (b-\alpha_m)^{N_i} \leqslant W(z, E_i) \leqslant (b+\alpha_m)^{N_i} & \text{pour i impairs.} \end{array}$$

Il en résulte

$$(9)\quad (a-\alpha_m)^{P_s} \cdot (b-\alpha_m)^{Q_s} \leqslant W\Big(z, \sum_{i/m+1}^{s-1} E_i\Big) \leqslant (a+\alpha_m)^{P_s} \cdot (b+\alpha_m)^{Q_s}$$

où
$$P_s = \sum_{\substack{m<i<s \\ i \text{ pairs}}} N_i, \qquad Q_s = \sum_{\substack{m<i<s \\ i \text{ impairs}}} N_i$$

Supposons que le nombre s soit pair. On aura alors d'après (7):

$$(10)\quad (a-\alpha_s)^{N_s} \leqslant W(z, E_s) \leqslant (a+\alpha_s)^{N_s}$$

En designant les quantités: $a+\alpha_m$, $a-\alpha_m$, $b+\alpha_m$, $b-\alpha_m$, $W(z, G_m)$ respectivement par: A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, C nous avons, en vertu de la propriété 3 et des relations (5), (6), (9), (10), l'inégalité:

$$(11)\quad C^{\frac{1}{M_s}} \cdot \overline{A}^{\frac{P_s}{M_s}} \cdot \overline{B}^{\frac{Q_s}{M_s}} \cdot (a-\alpha_s)^{\frac{N_s}{M_s}} \leqslant H_{M_s} \leqslant C^{\frac{1}{M_s}} \cdot A^{\frac{P_s}{M_s}} \cdot B^{\frac{Q_s}{M_s}} \cdot (a+\alpha_s)^{\frac{N_s}{M_s}}$$

Faisons tendre s vers $+\infty$ par les nombres pairs.
D'après la propriété 5, on aura alors:

$$\frac{N_s}{M_s} \longrightarrow 1,\ \frac{M_{s-1}}{M_s} \longrightarrow 0,\ P_s < M_{s-1},\ Q_s < M_{s-1},\ \frac{P_s}{M_s} \longrightarrow 0,\ \frac{Q_s}{M_s} \longrightarrow 0,$$

d'où il résulte que

$$(12)\quad H_{M_s} \longrightarrow a = |z|$$

En supposant que s soit un nombre impair on obtient d'une façon analogue les formules (10), (11), (12), où a doit être remplacé par b. Le lemme 1 est donc démontré.

Lemme 2. Soient G un ensemble fini et ϵ un nombre positif tels que

1° $|z'-z''| \leqslant 1$ pour toute couple de points z', z'' appartenant à G,

2° $|z'-z''| \leqslant \epsilon$ pour une certaine couple des points différents z', z'' appartenant à G. Alors il est clair qu'on a l'inégalité: $0 < V(G) \leqslant \epsilon$.

§ 3.

Construction de l'ensemble F. En conservant les notations précédentes nous allons construire l'ensemble F. Choisissons une suite β_i suivant la définition 5. L'ensemble E_1 soit composé des points: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Supposons qu'on ait défini pour $i < s$ les ensembles E_i. Choisissons le nombre α_s comme il suit: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ et $\alpha_s < V(G_{s-1})$ si $s > 2$. Nous avons: $\alpha_s < \alpha_{s-1}$, $\alpha_s \to 0$. Suivant que le nombre s soit pair ou impair considérons l'intervalle $\left[\frac{\alpha_s}{2}, \alpha_s\right]$ pour $s = 2k$, respectivement l'intervalle $\left[1-\alpha_s, 1-\frac{\alpha_s}{2}\right]$ pour $s = 2k+1$. Partageons cet intervalle en $N_s - 1$ parties, où N_s est un nombre naturel suffisamment grand pour que la propriété 5 soit remplie. Soit E_s l'ensemble composé des points de partage ainsi obtenus et des extrémités de l'intervalle.

Nous allons démontrer que l'ensemble $F = \sum_{i=1}^{\infty} E_i$ ainsi défini par récurrence jouit des propriétés 1—5. Il est évident que l'ensemble F possède les propriétés 1, 2, 4, 5. Il nous reste encore à démontrer la propriété 3. Nous allons distinguer trois cas suivant que l'ensemble $\overline{G}_s - G_s$ contient: 1) un seul point z', 2) deux points z', z'', 3) trois points ou plus.

Ad 1): Le point z' est contenu dans un des intervalles

$$(13) \qquad [0, \alpha_{s+1}], \ [1-\alpha_{s+1}, 1]$$

par exemple dans le premier. Si $z_1 = 0$ appartient à $\overline{G}_s$, alors, selon le lemme 2, on a l'inégalité

(14) $$V(\overline{G}_s) \leqslant \alpha_{s+1} < V(G_s)$$

parce que z' appartient à E_r, où $r > s$; $z' - z_1 \leqslant \alpha_r \leqslant \alpha_{s-1}$
Si, par contre, $z_1 = 0$ n'appartient pas à $\overline{G}_s$, alors

$$\overline{G}_s = G_s - \{z_1\} + \{z'\}$$

et l'on voit qu'en remplacant z' par z_1 on augmente certaines distances mutuelles des points sans changer les autres. Il en résulte

(15) $$V(\overline{G}_s) < V(G_s)$$

Ad 2): Si z' et z'' sont contenus dans le même intervalle (13), alors en vertu du lemme 2, on a l'inégalité (14). Supposons ensuite que z' soit situé dans le premier et z'' dans le second intervalle (13) et que les points $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ n'appartiennent pas à G_s.

On aura alors:

$$\overline{G}_s = G_s - \{z_1, z_2\} + \{z', z''\}$$

En remplaçant les points z' et z'' par z_1 et z_2 on obtient, par un raisonnements analogue à celui appliqué dans le cas précédent, l'inégalité (15).

Ad 3): Au moins deux points z' et z'' de l'ensemble $\overline{G}_s$ sont contenus dans le même intervalle (13). On aura alors: $|z' - z''| \leqslant \alpha_{s+1}$. Il en résulte immédiatement l'inégalité (14).

L'ensemble F possède donc la propriété 3. En vertu du lemme 1, la suite (5), correspondante à l'ensemble F ainsi construit, n'est pas convergente, à moins que le point z ne soit situé sur la bisectrice du segment [0,1].

UNE SOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE HOMOGENE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Par

MICHAL KUMOROVITZ (Bratislava)

Je veux présenter ici une solution du système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants *sans utiliser la théorie des diviseurs élémentaires*. A la base de notre solution est un théorème dû à E. Weyr, relatif à la nullité des puissances d'une matrice, théorème que l'on peut prouver sans faire recours aux formes canoniques[1]). Ce théorème adapté à nos besoins peut s'énoncer de la manière suivante:

Soit A une matrice carrée constante quelconque et r une de ses racines caractéristiques de multiplicité s.

J désignant la matrice unité du même ordre que A, nous poserons $M = A - rJ$. La nullité[2]) de la matrice M^i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ croît avec l'exposant i jusqu' à ce qu'elle atteigne pour un $i = q$ $(1 \leqq q \leqq s)$, la valeur s. A partir de ce moment, elle reste constante pour tous les i non inférieurs à q. Nous écrirons *nul* $M^i = s$ $(i \geqq q)$.

Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \qquad (i = 1 \ldots, n)$$

que l'on peut, à l'aide des matrices, mettre sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = Ax\,, \tag{1}$$

---

[1]) E. Weyr, O theorii forem bilinearních, Praha 1889, pp. 30—34, ou bien O. Borůvka. Sur les matrices singulières, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, t. 203 (1936), p, 600.

[2]) *Nul* $M = s$ signifie qu'il y a exactement s vecteurs p linéairement ndépendants satifaisant à l'équation $Mp = 0$.

où A désigne la matrice carrée des coefficients constants a_{ik}, x le vecteur aux composantes $x_1, \ldots, x_n$ écrites dans une colonne et t une variable réelle.

Nous affirmons que pour trouver la solution générale du système (1), on peut procéder de la façon suivante:

a) On fait la décomposition du polynôme caractéristique de la matrice A en facteurs linéaires

$$(2) \quad f(r) = |A - rJ| = (r - r_1)^{s_1} (r - r_2)^{s_2} \ldots (r - r_k)^{s_{k_3}},$$

où l'on a $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n$,

b) on calcule la matrice

$$(3) \quad M_\varkappa = A - r_\varkappa J$$

pour chaque racine caractéristique $r_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ et on construit les polynômes

$$(4) \quad F(M_\varkappa t) = J + \frac{M_\varkappa t}{1!} + \frac{(M_\varkappa t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(M_\varkappa t)^{s_\varkappa - 1}}{(s_\varkappa - 1)!},$$

c) on écrit $s_\varkappa$ vecteurs p liréairement indépendants et satisfaisant à l'équation

$$(5) \quad M_\varkappa^{s_\varkappa} p = 0$$

et l'on obtient ainsi une suite de k matrices $P_\varkappa$

$$(6) \quad P_\varkappa = (p_1^{(\varkappa)}, p_2^{(\varkappa)}, \ldots, p_{s_\varkappa}^{(\varkappa)}), \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

la matrice $P_\varkappa$ étant d'ordre $n \times s_\varkappa$.

Théorème 1. La solution générale du système (1) est donnée par la formule

$$(7) \quad x = (F(M_1 t) P_1 e^{r_1 t}, \ldots, F(M_k t) P_k e^{r_k t}) \cdot c$$

où $c \neq 0$ est un vecteur constant arbitraire.

Corollaire. Dans le cas spécial où toutes les racines caractéristiques $r_\varkappa$ sont simples, on aura $F(M_\varkappa t) = J$ et, au lieu de (5), on aura tout simplement $M_\varkappa p = 0$ pour $\varkappa = 1, \ldots, n$.

Remarque 1. Comme nous allons le prouver, au lieu du polynôme (2) il suffit de prendre le polynôme minimal

de A, $\psi(r)=(r-r_1)^{q_1}\ldots(r-r_k)^{q_k}$, si on le connaît, mais alors dans (4) et (5) il faudra remplacer respectivement les $s_\varkappa$ par les $q_\varkappa$ $(\varkappa=1,\ldots,k)$, tandis que la formule (6) reste la même car le nombre de vecteurs p est encore égal à $s_\varkappa$.

Démonstration. Rappelons, pour commencer, que a solution du système (1), acquise par exemple à l'aide du développement en série de Taylor et admettant pour $t=0$ la valeur initiale $x(0)=x_0\neq 0$, est donnée par la formule[1])

$$x(t)=e^{At}x_0, \tag{8}$$

où $x(t)$ désigne le vecteur aux composantes $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, et e^{At} la matrice donnée par la série exponentielle convergente

$$e^{At}\equiv J+\frac{At}{1!}+\frac{(At)^2}{2!}+\ldots \text{ in inf.} \tag{9}$$

dont le déterminant[2]) est égal à $e^{(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})t}$, et qui est régulière pour toute valeur finie de la variable t.

Pour passer maintenant de la formule (8) à une autre qui ne comprend qu' un nombre fini de termes, nous aurons besoin de la décomposition

$$A=M_\varkappa+r_\varkappa J \qquad (\varkappa=1,\ldots,k) \tag{10}$$

(qui n'est d'ailleurs que l'équation (3) transcrite) et d'une substitution

$$x_0=Pc \tag{11}$$

dans laquelle la matrice régulière P sera choisie convenablement. Dans la première étape de la démonstration, en admettant la régularité de la matrice P, nous établirons une formule provisoire (14). Nous en déduirons ensuite la for-

---

[1]) Peano, Intégration par séries des équations différentielles. linéaires, Math. Annalen 32 (1888). p. 456 (l'auteur n'emploie pas la série de Taylor).

[2]) Schlesinger. Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkül der Matrizen, Math. Zeitschrift, 33 (1931), p. 43—44.

mule (7) du Théorème 1, et enfin nous établirons la régularité de la matrice P, ce qui terminera la démonstration, du théorème.

a) Il résulte du théorème de Weyr que l'on peut toujours trouver $s_\varkappa$ vecteurs $p_\sigma^{(\varkappa)}$ satisfaisant à l'équation

$$(5') \qquad M_\varkappa^{q_\varkappa} p = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

avec lesquels on peut construire une matrice

$$(6') \qquad P_\varkappa = (p_1^{(\varkappa)}, p_2^{(\varkappa)}, \ldots, p_{s_\varkappa}^{(\varkappa)}) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

d'ordre $n \times s_\varkappa$ et du rang $s_\varkappa$.

Si $\varphi(M)$ est un polynôme scalaire d'une matrice M (supposée carrée) du plus petit degré d tel que l'on ait $\varphi(M)\, p = 0$ pour un vecteur p, on dira que le vecteur p est du d e g r é d par rapport à la matrice M. Spécialement, pour les vecteurs $p_\sigma^{(\varkappa)}$ contenus dans la matrice $P_\varkappa$ il est clair qu'au moins un parmi ces vecteurs est du degré $q_\varkappa$, avec $\varphi(M) = M_\varkappa^{q_\varkappa}$, et qu'aucun n'est du degré supérieur à $q_\varkappa$. On a donc $M_\varkappa^{q_\varkappa} P_\varkappa = 0$.

Cela posé, on a

$$(12) \qquad e^{M_\varkappa t} P_\varkappa = \left[J + \frac{M_\varkappa t}{1!} + \ldots + \frac{(M_\varkappa t)^{q_\varkappa - 1}}{(q_\varkappa - 1)!} \right] P_\varkappa +$$

$$+ \left[\frac{t^{q_\varkappa}}{q_\varkappa !} + \ldots \text{ in inf.} \right] M_\varkappa^{q_\varkappa} P_\varkappa = F(M_\varkappa t)\, P_\varkappa,$$

si conformément à (4), on désigne par $F(M_\varkappa t)$ l'expression contenue dans les premiers crochets du second membre. En utilisant la relation (10) et la commutativité des matrices $M_\varkappa$ et de J on a encore

$$(13) \qquad e^{At}\, P_\varkappa = e^{(M_\varkappa + r_\varkappa J)t}\, P_\varkappa = e^{M_\varkappa t}\, e^{r_\varkappa J t}\, P_\varkappa$$

$$= e^{M_\varkappa t}\, P_\varkappa\, e^{r_\varkappa t} = F(M_\varkappa t)\, P_\varkappa\, e^{r_\varkappa t}.$$

Construisons avec les matrices $P_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots, k)$ une matrice P qui contient $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n$ vecteurs dont nous admettons — pour l'instant — la régularité. Posons donc

$$P = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$$

et écrivons la solution (8) du système (1) en y remplaçant x_0 par le produit Pc. On aura

$$x = e^{At} (P_1, P_2, \ldots, P_k)\, c = (e^{At} P_1, e^{At} P_2, \ldots, e^{At} P_k)\, c$$

ce qui donne, d'après l'équation (13), la formule provisoire

$$(14) \qquad x = (F(M_1 t) P_1 e^{r_1 t}, \ldots, F(M_k t) P_k e^{r_k t})\, c$$

où les polynomes $F(M_1 t), \ldots, F(M_k t)$ sont de degré respectivement $q_1, \ldots, q_k$.

b) La formule (14) n'est pas très commode puisqu'il y figurent les q, c'est-à-dire les exposants minima pour lesquels on a *nul* $M_\varkappa^{q_\varkappa} = s_\varkappa$. Nous allons prouver qu'on peut les remplacer par les nombres $s_\varkappa$.

Lemme 1. Dans la formule (14) on peut remplacer les matrices $P_1, \ldots, P_k$ calculées des équations (5′) par les matrices $Q_1, \ldots, Q_k$ calculées des équations

$$(15) \qquad M_\varkappa^{i_\varkappa} p = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

dans lesquelles l'exposant $i_\varkappa$ peut être choisi arbitrairement pourvu qu'il ne soit pas inférieur à $q_\varkappa$.

Soit, en effet, q le plus petit exposant tel que l'on ait *nul* $M^q = s$ (nous omettons dans la démonstration l'indice $\varkappa$ des lettres M, P, Q, q, r, s). Soit $j \geqq q$. D'après le théorème de Weyr on a donc *nul* $M^{k+j} = s$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$. Supposons que P soit du rang s. De la relation $M^j P = 0$ il suit que

$$(16) \qquad M^{k+j} P = M^k M^j P = M^k \cdot 0 = 0.$$

D'autre part, soit Q une solution fondamentale de l'équation $M^{k+j} p = 0$. Puisque P est une autre solution fondamentale, il existe une matrice régulière C d'ordre s, telle qu'on ait

$P = QC$. Il en résulte que $0 = M^j P = M^j QC$ et, en multipliant de droite par C^{-1}, on voit que $M^j Q = 0$. De cette dernière équation, à laquelle on peut associer une équation (16) en Q, nous voyons que la matrice Q, servant de facteur, annule dans le développement de e^{Mt} (l'équation (12)) les mêmes puissances de la matrice M que la matrice P. Le produit $F(Mt).Q$ ne contient donc que les termes en Mt de degré inférieur à q, ce qui termine la démonstration de notre lemme.

De la démonstration précédente on déduit immédiatement le:

Lemme 2. Les polynômes $F(M_\varkappa t)$ intervenant dans (14), quant à leurs degrés, ne sont astreints qu'à une seule condition, à savoir, que leurs degrés respectifs ne soient pas inférieurs à $q_\varkappa$.

Nous en concluons qu'il est permís de prendre au lieu de la formule (14) la formule (7) avec les $F(M_\varkappa t)$ donnés par (4) et $P_\varkappa$ donnés par (6).

c) Il ne nous reste maintenant que de prouver que les n vecteurs $p_1^{(1)}, \ldots, p_{s_1}^{(1)}, \ldots, p_1^{(k)}, \ldots, p_{s_k}^{(k)}$ de la matrice P introduite après l'équation (13) sont linéairemnet indépendants.

Lemme 3. Soient $P = (P_1, P_2, \ldots, P_k)$ et $Q = (Q_1, Q_2, \ldots Q_k)$ deux matrices construites avec des solutions fondamentales arbitraires de (15) pour $\varkappa = 1, \ldots, k$. On peut trouver une matrice régulière C d'ordre n telle qu'on ait

$$P = QC \tag{17}$$

De $P_\varkappa = Q_\varkappa C_\varkappa$, $|C_\varkappa| \neq 0$, $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ il suit, en effet, que

$$P = (Q_1 C_1, \ldots, Q_k C_k) = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_k) \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & C_k \end{pmatrix} = QC$$

et que $|C| = |C_1|\,|C_2| \ldots |C_k| \neq 0$.

Corollaire. Si une seule des matrices P, construites de la manière prescrite, est régulière, il le sont toutes.

Choisissons donc la matrice P, dont nous établirons la régularité, de la manière suivante. Pour une valeur fixe de l'indice $\varkappa$ soit $1 \leqq i \leqq q_\varkappa$ (la signification de q reste toujours la même). Si $q_\varkappa = 1$, on a par définition de $q_\varkappa$ que $nul\ M_\varkappa = s_\varkappa$, et alors tous les vecteurs de $P_\varkappa$ sont du premier degré par rapport à $M_\varkappa$. Si l'on a $q_\varkappa > 1$, il existe un exposant i tel que $1 \leqq i < q_\varkappa$ et que $nul\ M_\varkappa^i < nul\ M_\varkappa^{i+1}$. Considérons tous les vecteurs linéairement indépendants et satisfaisant à l'équation $M_\varkappa^i p = 0$. Il sont en nombre égal à $nul\ M_\varkappa^i$ et ils satisfont aussi à l'équation $M_\varkappa^{i+} p = 0$, car $M_\varkappa^{i+1} p = M_\varkappa \cdot M_\varkappa^i p = M_\varkappa \cdot 0 = 0$. Or, le nombre total de solutions de $M_\varkappa^{i+1} p = 0$ est égal à $nul\ M_\varkappa^{i+1}$. Il y a donc d'autres vecteurs en nombre de $(nul\ M_\varkappa^{i+1} - nul\ M_\varkappa^i) > 0$ satisfaisant à l'équation $M_\varkappa^{i+1} p = 0$ qui ne se laissent pas représenter par une combinaison linéaire de vecteurs considérés et qui sont évidemment de degré $i+1$. Ajoutons ces vecteurs aux vecteurs premiers. Mettons successivement $i = 1, 2, \ldots, q_\varkappa - 1$. Nous aurons ainsi construit une matrice $P_\varkappa$ qui jouira des propriétés suivantes:

1) Elle contient les vecteurs $p_\sigma^{(\varkappa)}$ $(\sigma = 1, \ldots, s_\varkappa)$ depuis le premier jusqu' au $q_\varkappa$-ième degré par rapport à $M_\varkappa$.

2) Aucun de ces vecteurs ne se laisse représenter par une combinaison linéaire d'autres vecteurs du même degré, s'il y en a, et de vecteurs éventuels des degrés inférieurs.

3) Supposons encore, pour plus de commodité, que les vecteurs $p_\sigma^{(\varkappa)}$ dans $P_\varkappa$ sont rangés suivant leur degré décroissant.

Admettons maintenant, pour faire la démonstration indirecte, que P ne soit pas régulière, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur constant $c \neq 0$ tel que l'on ait

(18) $$Pc = 0,$$

ou bien plus explicitement,

(18a) $$P_1 c_1 + P_2 c_2 + \ldots + P_k c_k = 0.$$

Ici c_1 est le vecteur partiel composé de s_1 premières, c_2 le vecteur partiel de s_2 suivantes, etc., et c_k le vecteur partiel de s_k dernières composantes du vecteur c.

Soit maintenant γ_a la première parmi les composantes $\gamma_1 . \gamma_2 \ldots, \gamma_n$ du vecteur c qui soit différente de zéro. Par un changement éventuel des indices on peut toujours obtenir que γ_a appartienne à c_1, ce que nous supposerons dans la suite.

Dans le produit $P_1 c_1$ groupons les termes contenant les vecteurs du degré le plus élevé i $(1 \leqq i \leqq q_1)$ et séparons-les par une parenthèse de ceux qui sont du degré inférieur à i, c'est-à-dire

(19) $$P_1 c_1 = (\gamma_a p_a^{(1)} + \ldots + \gamma_\pi p_\pi^{(1)}) + \gamma_{\pi+1} p_{\pi+1}^{(1)} + \ldots + \gamma_{s_1} p_{s_1}^{(1)} = \\ = u_i + u_{i-1}$$

où les vecteurs u_i et u_{i-1} représentent les groupements respectifs.

Multiplions de gauche l'équation (18a) par le produit $M_1^{i-1} \cdot M_2^{q_2} M^{q_3} \ldots M_k^{qk}$ et rappelons que les matrices $M_\varkappa$ sont permutables entre elles. Comme on a $M_\varkappa^{q_\varkappa} P_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 2, \ldots, k)$ et $M_1^{i-1} u_{i-1} = 0$, l'équation (18a) devient

(20) $$M_2^{q_2} \ldots M_k^{qk} \cdot M_1^{i-1} u_i = 0.$$

Posons maintenant dans l'équation précédente

(21) $$M_\varkappa = A - r_1 J + (r_1 - r_\varkappa) J = M_1 + \varDelta_\varkappa J \qquad (\varkappa \neq 1)$$

ou $\varDelta_\varkappa \neq 0$, car les racines $r_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, \text{k})$ sont différentes, et nous aurons

$$(g\ (M_1) \cdot M_1 + \varDelta_2^{q_2} \ldots \varDelta_k^{qk} J) \cdot M_1^{i-1} u_i = 0,$$

g (M_1) étant un polynôme en M_1 de degré $q_2 + \ldots + q_k - 1$. Et finalement, à cause de la relation $M_1^i\ u_i = 0$, on a

(22) $$M_1^{i-1} u_i = 0.$$

Cela veut dire que le vecteur u_i est au plus de degré $i - 1$. En se rappelant la signification de u_i introduite par l'équation (19), on peut écrire

$$p_\alpha^{(1)} = \frac{1}{\gamma_\alpha} u_i - \left(\frac{\gamma_{\alpha+1}}{\gamma_\alpha} p_{\alpha+1}^{(1)} + \ldots + \frac{\gamma_\pi}{\gamma_\alpha} p_\pi^{(1)} \right) \qquad (\gamma_\alpha \neq 0).$$

On a donc exprimé le vecteur $p_\alpha^{(1)}$ comme une combinaison linéaire de vecteurs $p_{\alpha+1}^{(1)}, \ldots, p_\pi^{(1)}$ qui sont de degré i et du vecteur u_i de degré inférieur à i. Or, cela est contraire à la propriété 2) de la matrice P_1 signalée plus haut. Nous concluons qu'il est impossible de trouver un vecteur $c \neq 0$ tel que l'équation (18) soit satisfaite. Les vecteurs de la matrice P sont linéairement indépendants et le Théorème 1 est complètement prouvé.

R e m a r q u e 2. Pour justifier encore la Remarque 1 il suffit de démontrer le

Lemme 4. Le polynôme $\psi(r) = (r - r_1)^{q_1} \ldots (r - r_k)^{q_k}$ avec les nombres $q_1, \ldots, q_k$ figurant dans la solution (14) est le polynôme minimal de la matrice A.

Soit, en effet, $v = (P_1, \ldots, P_k) \cdot \bar{v}$ un vecteur arbitraire et la matrice $(P_1, \ldots, P_k)$ régulière avec $P_\varkappa$ satisfaisant aux équations $M_\varkappa^{q_\varkappa} = 0$ respectivement. On a

$$\psi(Av) = (\psi(A) P_1, \ldots, \psi(A) P_k) \bar{v}$$

avec $\psi(A) P_\varkappa = M_1^{q_1} \ldots M_\varkappa^{q_\varkappa} \ldots M_k^{q_k} P_\varkappa = 0$, car les $M_\varkappa$ sont permutables. On a donc $\psi(A) v = 0$, d'où, v étant arbitraire, on tire que $\psi(A) = 0$.

Supposons d'autre part que u soit un vecteur, tel que $M_1^{q_1} u = 0$, mais $M_1^{q_1 - 1} u \neq 0$. En multipliant u de gauche par une matrice $\psi_1(A) = M_2^{i_2} \ldots M_k^{i_k} \cdot M_1^{q_1 - 1}$, où $1 \leqq i_\varkappa \leqq q_\varkappa$ $(\varkappa = 2, \ldots, k)$, on arrive à une expression analogue à celle du premier membre de (22), à savoir,

$$\psi_1(A) u = \Delta_2^{i_2} \ldots \Delta_k^{i_k} \cdot M_1^{q_1 - 1} u$$

qui est différente de zéro, les $\Delta_\varkappa$ ayant la même signification que dans l'équation (21).

Cela prouve que $\psi_1(A)$, pour annuler le vecteur u, doit être en M_1 de degré q_1 au moins et, par conséquent, le polynôme $\psi_1(r)$ doit posséder le facteur linéaire $(r - r_1)$ du degré q_1 au

moins. Pareil raisonnement pour les autres facteurs montre qu'ils doivent être au moins de degrés respectifs $q_\varkappa$. Le polynôme $\psi(r)$ est donc bien minimal.

Théorème 2. Si la matrice A est symétrique et réelle l'équation (4) devient $F(M_\varkappa t)=J$ et au lieu de (5) il suffira de prendre $M_\varkappa\, p = 0$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$.

On sait, en effet, que dans ce cas les matrices $M_\varkappa$ sont symétriques et réelles elles aussi et que, par conséquent, *nul* $M_\varkappa = s_\varkappa$ déjà pour $i=q_\varkappa=1$ $(\varkappa=1, \ldots, k)$.

Théorème 3. Si l'on a un vecteur v satisfaisant à deux conditions suivantes: 1) $M_\varkappa^i\, v=0$, 2) $M_\varkappa^{i-1}\, v \neq 0$, $i > 1$, pour un $\varkappa$ fixe, et que l'on construit le polynôme vecteur $p(t) = F(M_\varkappa\, t)\, v$ de sorte que l' on ait une solution particulière

$$(p) \qquad x = p(t)\, e^{r_\varkappa t}$$

du système (1), nous disons que l' on obtient $(i-1)$ autres solutions particulières linéairement indépendantes en remplaçant $p(t)$ dans cette solution particulière (p) par les $i-1$ dérivées successives par rapport à t du même vecteur $p(t)$.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que le vecteur v satisfasse pour un $\varkappa$ fixe à deux conditions indiquées dans le théorème. Notons en passant que ces deux conditions avec le théorème de Weyr entraînent que $i \leqq s_\varkappa$. De la formule (7), le vecteur c étant arbitraire, il suit que

$$x_\sigma^{(\varkappa)} = F(M_\varkappa t)\, p_\sigma^{(\varkappa)}\, e^{r_\varkappa t}$$

représente une solution particulière du système (1). Nous prouvons d'abord le:

Lemme 5. Avec les vecteurs non nuls $v, M_\varkappa v, \ldots, M_\varkappa^{i-1} v$, si v remplit les deux conditions du théorème 3, on peut construire une matrice $P_\varkappa$ du rang i qui donne i solutions linéairement indépendantes du système (1), soit

$$X = F(M_\varkappa t)\, P_\varkappa\, e^{r_\varkappa t}.$$

Pour établir ce lemme il suffit de montrer que ces vecteurs satisfont à l'équation (5) et qu'ils sont linéairement indépendants. Mais ils satisfont à l'équation (5), car $M^s \cdot M^k v = M^{s+k-i} \cdot M^i v = M^{s+k-i} \cdot 0 = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, i-1$ (nous omettons l'indice $\varkappa$ dans la démonstration du Théorème 3 qui suit; $M^0 = J$ par définition). Ces vecteurs sont linéairement indépendants. En supposant vrai le contraire on a

$$\gamma_1 v + \gamma_2 Mv + \ldots + \gamma_i M^{i-1} v = 0, \tag{23}$$

où les constantes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i$ ne sont pas toutes nulles. Supposons que γ_k en soit la première qui est différente de zéro, c'est-à-dire $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \ldots, \gamma_{k-1} = 0$, $\gamma_k \neq 0$. De l'équation (23), qui commence cette fois par $\gamma_k M^{k-1} v + \gamma_{k+1} M^k v + \gamma_{k+2} M^{k+1} v + \ldots$, si nous la multiplions de gauche par M^{i-k}, il ne reste dans le premier membre qu'un seul terme $\gamma_k M^{i-1} v$ qui, par hypothèse faite au sujet de v et de γ_k, est différent de zéro. Ainsi est-on parvenu à une contradiction. Le lemme est donc démontré.

Parmi les vecteurs $v, Mv, \ldots, M^{i-1} v$ choisissons un, soit $M^k v$ $(0 < k \leqq i-1)$. La solution particulière du système (1) relative à ce vecteur est $x^{(k+1)} = F(Mt) \cdot M^k v \cdot e^{rt}$. Comme $M^{i-k} M^k v = 0$, le dernier terme de $F(Mt)$ qui ne s'annule pas dans cette solution est de degré $i-k-1$ en Mt. D'autre part, si nous calculons la k-ième dérivée par rapport à t du vecteur $p(t) = F(Mt)\, v$, nous aurons

$$\frac{d^k p}{dt^k} = \left(M^k + M^{k+1} \frac{t}{1!} + \ldots + M^{i-1} \frac{t^{i-k-1}}{(i-k-1)!}\right) \cdot v = F(Mt) \cdot M^k v,$$

où $F(Mt)$ est également de degré $i-k-1$ en Mt. On voit donc que pour $k = 1, 2, \ldots\, i-1$ on a

$$x^{(k+1)} = \frac{d^k p(t)}{dt^k} \cdot e^{rt}$$

c·q·f·d.

SOLUTION OF A PROBLEM OF M. F. LEJA

By
HIDETAKA TERASAKA (Osaka, Japan)

M. F. Leja has proposed the following problem (Ann. Soc. Pol. de Math. t. XIX (1946), p. 252.):

„Soit E un ensemble fermé et borné des points de l'espace à 3 dimensions, $|p_1 p_2|$ la distance cartésienne des points p_1 et p_2, n un nombre naturel fixe et

$$p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_n^{(n)}$$

un système de n points de E tel que la somme

$$\sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \frac{1}{\left| p_i^{(n)} p_k^{(n)} \right|}$$

soit la plus petite.

Prouver que la suite des fonctions du point variable u

$$(*) \qquad g_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left| u\, p_k^{(n)} \right|}, \quad n = 1, 2$$

converge partout en dehors de E (ou montrer que cette proposition est fausse)."

In the following we shall show by constructing a simple counterexample that the proposition is false.

We are going to define step by step two sequences of natural numbers n_i and m_i ($i = 1, 2, \ldots$) such that

$$(1) \qquad \begin{gathered} 1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots \\ m_1 < m_2 < \ldots < m_i < \ldots \end{gathered}$$

and two sequences of real numbers a_n and b_m ($n, m = 1, 2, \ldots$) such that

(2) $0 < a_{n+1} < a_n < b_m < b_{m+1} < 1$, $(n, m = 1, 2, \ldots)$.

For the sake of simplicity we write

(3) $$\sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \frac{1}{|a_i - a_k|} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

for n real numbers a_1, a_2, ..., a_n which are different from one another.

Now let n_1 be an arbitrary integer > 1 and let $a_1, a_2, \ldots a_{n_1}$ be n_1 real numbers satisfying (2), otherwise arbitrary. Suppose a_n and b_m with $1 \leqq n \leqq n_i$ and $1 \leqq m \leqq m_{i-1}$ $(m_0 = 0)$ respectively have beem already defined for an $i \geqq 1$, and let $b_{m'}$ for $m' = m_{i-1} + 1$ be a positive number < 1 such that

(4) $$[0, a_{n_i}, a_{n_i-1}, \ldots, a_2, a_1, b_1, b_2, \ldots b_{m_{i-1}}, 1] < \frac{1}{1 - b_{m'}}$$

Let c be a arbitrary but fixed real number different from $\frac{1}{2}$ and satisfying $a_2 < c < a_1$. We choose then an integer m_i sufficiently large and correspondingly positive numbers b_m $(m_{i-1} + 1 < m \leqq m_i)$ satisfying (2) and sufficiently near to 1, such that

(5) $$\left| \frac{1}{n_i + m_i + 2} \left(\frac{1}{c} + \sum_{n=1}^{n_i} \frac{1}{|c - a_n|} + \sum_{m=1}^{m_i} \frac{1}{|c - b_m|} + \frac{1}{1-c} \right) - \frac{1}{1-c} \right| < \frac{1}{2^i}$$

Similarly suppose a_n and b_m with $1 \leqq n \leqq n_i$ and $1 \leqq m \leqq m_i$ have been already defined for an $i \geqq 1$, and let $a_{n'}$ for $n' = n_i + 1$ be a positive number < 1 such that

(6 $$[0, a_{n_i}, a_{n_i-1}, \ldots, a_2, a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{m_i}, 1] < \frac{1}{a_{n'}}.$$

We choose then an integer n_{i+1} sufficiently large and correspondingly positive numbers a_n $(n_i+1<n\leqq n_{i+1})$ satisfying (2) and sufficiently near to 0, auch that

$$(7)\qquad \left|\frac{1}{n_{i+1}+m_i+2}\left(\frac{1}{c}+\sum_{n=1}^{n_{i+1}}\frac{1}{|c-a_n|}+\sum_{m=1}^{m_i}\frac{1}{|c-b_m|}+\frac{1}{1-c}\right)-\frac{1}{c}\right|<\frac{1}{2^i}.$$

We have thus defined two sequences of real numbers a_n and b_m in the interval $0\leqq x\leqq 1$ converging monotonously to 0 and 1 respectively.

If we consider a_n and b_m as the points on the segment [0, 1], then the point-set $E=\{0, a_n, b_m, 1\}$, where n and m range over all natural numbers, is the required one, that is a set, for which the proposition does not hold.

As a matter of fact we can prove that

$$g_n(c)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|c\,p_k^{(n)}|}$$

does not converge for $n\to\infty$.

To show this, let $n>1$ and let

$$P_n=\{p_1^{(n)},\ p_2^{(n)},\dots,\ p_n^{(n)}\}$$

be a system of points $\subset E$ such that

$$[P_n]=[p_1^{(n)},\ p_2^{(n)},\dots,\ p_n^{(n)}=\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\frac{1}{|p_i^{(n)}\ p_k^{(n)}|}$$

assumes the smallest value. We remark first that P_n must contain both 0 and 1, since otherwise we would get a smaller value than $[P_n]$ if we substitute the smallest or the greatest point of P_n by 0 or 1 respectively.

In case

$$n=2+(n_1+n_2+\dots+n_i)+(m_1+m_2+\dots+m_{i-1})$$

P_n consits exactly of 0, $a_{n_i}, a_{n_i-1}, \ldots, a_2, a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{m_{i-1}}$ and 1, because if P_n should contain a point $a_n < a_{n_i}$ or a point $b_m > b_{m_{i-1}}$, then, since P_n contains both 0 and 1, we would have either by virtue od (4)

$$[0, a_{n_i}, \ldots, a_2, a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{m_{i-1}}, 1] < \frac{1}{1-b_{m'}} \leqslant \frac{1}{1-b_m} < [P_n],$$

or by virtue of (6)

$$[0, a_{n_i}, \ldots, a_1, b_1, b_2, \ldots, b_{m_{i-1}}, 1] <$$
$$< [0, a_{n_i}, \ldots, a_1\ b_1, b_2, \ldots, b_{m_{i-1}}, \ldots, b_{m_i}, 1] <$$
$$< \frac{1}{a_{n'}} \leqq \frac{1}{a_n} < [P_n].$$

which is absurd. We have thus by virtue of (7)

$$\left| g_n(c) - \frac{1}{c} \right| < \frac{1}{2^i}.$$

Similarly we nave in case

$$n = 2 + (n_1 + n_2 + \ldots + n_i) + (m_1 + m_2 + \ldots + m_i)$$

the relation

$$\left| g_n(c) - \frac{1}{1-c} \right| < \frac{1}{2^i}.$$

Thus $g_n(c)$ does not converge for $n \to \infty$, q. e. d.

REMARQUE SUR LA NOTE PRÉCÉDENTE

Par

F. LEJA (Kraków)

Observons que l'ensemble $\{0, a_n, b_m, 1\}$ construit par M. H. Terasaka, pour lequel la suite $\{g_n(u)\}$ admet des points de divergence en dehors de cet ensemble, ne possède que deux points d'accumulation[1]) et que, par suite, son

[1]) Cf. la Note de M. R. Leitner insérée dans ce volume, p. ....

diamètre transfini au sens de MM. G. Polya et G. Szegö[2]) est égal à zéro. Plus généralement, si le diamètre transfini d'un ensemble E est nul, la suite correspondante $\{g_n(u)\}$ peut parfois admettre des points de divergence n'appartenant pas à E. Par exemple, si E est un ensemble fini ne se réduisant pas à un seul point, les points extrémaux de E peuvent être choisis de manière que la suite $\{g_n(u)\}$ admette des points de divergence, tandis que, si E est infini et n'a qu'un seul point d'accumulation, la suite correspondante $\{g_n(u)\}$ est toujours convergente.

Le cas général, où le diamètre transfini de E est positif, exige une étude speciale et dans ce cas le problème de convergence de la suite $\{g_n(u)\}$ en dehors de E reste ouvert.

---

[2]) Cf. Journal für Math. t. 165 (1931), p. 4—49.

SUR LES SYSTEMES MAJORANTS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES

Par

J. SZARSKI (Kraków)

Introduction

Considérons un système d'équations différentielles ordinaires

(1) $$y_i' = f_i(t, y_1, \ldots, y_n) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les fonctions f_i sont supposées d'être continues dans un ensemble ouvert Ω de l'espace de points $(t, y_1, \ldots, y_n)$. Nous allons adopter les définitions suivantes.

Majoration universelle au sens S_1. Nous dirons que *le système* (1) *se prête à la majoration universelle au sens S_1^+ dans Ω*, lorsqu' à tout point $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ appartenant à Ω il correspond une intégrale

(2) $$y_i = \varphi_i(t) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

du système (1) issue du point P_0 et remplissant la condition suivante:

Condition M_1^+: pour chaque courbe

(3) $$y_i = \psi_i(t) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

passant par le point P_0, continue et satisfaisant aux inégalités différentielles

(4) $$\psi_i'(t) \leqslant f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dans un voisinage unilatéral à droite de t_0, les inégalités

(5) $$\psi_i(t) \leqslant \varphi_i(t) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont vérifiées ***dans un voisinage unilatéral à droite de t_0***,

Nous dirons que *le système* (1) *se prête à la majoration universelle au sens* S_1^- *dans* Ω, lorsqu' à tout point $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ appartenant à Ω il correspond une intégrale (2) du système (1) issue du point P_0 et remplissant la condition suivante :

Condition M_1^-: pour chaque courbe (3) passant par P_0, et satisfaisant aux inégalités différentielles

(6) $\qquad \psi_i'(t) \geqslant f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

dans un voisinage unilatéral à gauche de t_0, les inégalités (5) sont vérifiées *dans un voisinage unilatéral à gauche de* t_0.

Nous dirons enfin que *le système* (1) *se prête à la majoration universelle au sens* S_1 *dans* Ω, lorsqu' il se prête à la majoration au sens S_1^+ et au sens S_1^- simultanément.

Majoration universelle au sens S_2. Nous dirons que *le système* (1) *se prête à la majoration universelle au sens* S_2^+ *dans* Ω, lorsqu' à tout point $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ appartenant à Ω il correspond une intégrale (2) du système (1) issue du point P_0 et remplissant la condition suivante:

Condition M_2^+: pour chaque système d'équations différentielles

(7) $\qquad y_i' = g_i(t, y_1, \ldots, y_n) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

dont les seconds membres sont continus dans Ω et y satisfont aux inégalités

(8) $\qquad g_i(t, y_1, \ldots, y_n) \leqslant f_i(t, y_1, \ldots, y_n) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

et pour chaque intégrale (3) du système (7) issue du point P_0, les inégalités (5) sont vérifiées *dans un voisinage unilatéral à droite de* t_0.

Nous dirons que *le système* (1) *se prête à la majoration universelle au sens* S_2^- *dans* Ω, lorsqu'à tout point $P_0(t_0. \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ appartenant à Ω il correspond une intégrale (2) du système (1) issue du point P_0 et remplissant la condition suivante:

Condition M_2^-: pour chaque système (7) dont les seconds membres sont continus dans Ω et y satisfont aux inégalités

(9) $g_i(t, y, \ldots, y_n) \geqslant f_i(t, y_1, \ldots y_n)$, $(i = 1, 2 \ldots, n)$
et pour chaque intégrale (3) du systéme (7) issue du point P_0, les inégalités (5) sont vérifiées *dans un voisinage unilatéral à gauche de* t_0.

Nous dirons enfin que *le système* (1) *se prête à la majoration universelle au sens* S_2 *dans* Ω, lorsqu' il se prête à la majoration au sens S_2^+ et au sens S_2^- simultanément.

Remarque 1. Il est immédiat qu'un système qui se prête à une des majorations au sens S_1^+, S_1^-, ou S_1 se prête à fortiori à la majoration correspondante au sens S_2^+, S_2^-, ou S_2, mais le réciproque n'est pas évident.

Majoration universelle au sens T_1. En remplaçant dans les énoncés des conditions M_1^+ et M_1^- la phrase" pour chaque courbe (3) passant par le point $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ " par la phrase suivante: " pour chaque courbe (3) issue d'un point $Q(t_0 y_1, \ldots, y_n)$ quelconque appartenant à Ω et tel que

(10) $$y_i \leqslant \mathring{y}_i \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

continue etc.", on obtient les définitions des majorations au sens T_1^+, T_1^- et T_1.

Majoration universelle au sens T_2. En remplaçant dans les énoncés des conditions M_2^+ et M_2^- la phrase" pour chaque intégrale (3) du système (7) issue du point P_0" par la phrase suivante: " pour chaque intégrale (3) du système (7) issue d'un point $Q(t_0, y_1, \ldots, y_n)$ quelconque appartenant à Ω et remplissant les inégalités (10) etc.", on obtient les définitions des majorations au sens T_2^+, T_2^- et T_2.

Propriété P de l'ensemble Ω. Nous dirons qu'un ensemble ouvert Ω jouit de la propriété P, lorsque toute section non-vide de l'ensemble Ω par un plan $t = const.$ constitue un ensemble convexe.

Condition C. On dira que le système de fonctions $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, remplit la conoition C, lorsque la fonction $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ est croissante (au sens large) par

rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ séparément.[1])

Condition D. On dira que le système de fonctions $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, remplit la condition D, lorsque la fonction $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ est décroissante (au sens large) par rapport à chacune des variables $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ séparément.

Remarque 2. Il est facile de montrer que si l'ensemble Ω jouit de la propriété P, alors les fonctions d'un système $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, remplissant les conditions C et D à la fois ont forcément la forme

(11) $$f_i(t, y_1, \ldots, y_n) = h_i(t, y_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

où la fonction h_i ne dépend que des variables t et y_i.

M. T. Ważewski a démontré[2]) que la condition C est suffisante et nécessaire pour que le système (1) se prête à la majoration universelle au sens T_1^+. Une proposition analogue subsiste pour la majoration universelle au sens T_2^+. La condition D est pareillement suffisante et nécessaire[3]) pour que le système (1) se prête à la majoration universelle au sens T_1^-. Une proposition analogue subsiste pour la majoration universelle au sens T_2^-. Il en résulte, en vertu de la Remarque 2, que les seuls systèmes qui se prêtent à la majoration au sens T_1 ou bien au sens T_2 dans un ensemble Ω jouissant de la propriété P sont ceux dont les seconds membres ont la forme (11).

Or le but de la note présente est d'établir des propositions analogues pour les notions de majoration au sens S.

§ 1.

Avant d'énoncer les théorèmes en question nous allons démontrer quelques lemmes qui nous faciliteront les démonstrations dans la suite.

---

[1]) Ceci veut dire que

$$f_i(t, y\ , \ldots, y_{j-1}, k_j, y_{j+1}, \ldots, v_n) \leqslant f_i(t, y_1, \ldots, y_{j-1}, l_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$$

lorsque $i \neq j$ et $k_j \leqslant l_j$.

[2]) cf. T. Ważewski: *Systèmes d'équations et d'inégalités différentielles aux deuxièmes membres monotones*, Ann. Soc. Pol. Math. T. XXIII. Théorème 2a et Théorème 3.

[3]) cf. Ważewski: loc. cit. Théorème 2a bis et Théorème 3 bis.

Lemme 1: Supposons que la fonction $f(t, y)$ soit continue au voisinage du point (0, 0) et qu'elle y remplisse les relations

(12) $$f(0,0)=0$$

(13) $$f(t,0)>0 \qquad \text{pour } t>0.$$

Dans ces hypothèses il existe une courbe $y=\psi(t)$ définie et dérivable au voisinage de $t=0$ et telle que

(14) $$\psi'(t)\leqslant f(t,\psi(t)) \qquad \text{pour } t\geqslant 0.$$

(15) $$\psi(t)>0 \qquad \text{pour } t>0.$$

(16) $$\psi(0)=0.$$

Démonstration. Considérons l'équation différentielle

(17) $$y'=f(t,y)-\frac{1}{2}f(t,0).$$

ainsi que l'équation

(18) $$y'=f(t,y)-f(t,0).$$

et désignons par $y=\psi(t)$ l'intégrale supérieure de l'équation (17) issue du point (0,0). On aura alors (16) ainsi que (14) puisque, d'après (12) et (13)

(19) $$\psi'(t)=f(t,\psi(t))-\frac{1}{2}f(t,0)\leqslant f(t,\psi(t)) \qquad \text{pour } t\geqslant 0.$$

D'autre part le second membre de l'équation (17) étant, en vertu de (13), plus grand que celui de l'équation (18) et la courbe $y=0$ étant évidemment une intégrale de l'équation (18) issue du point (0,0) on a l'inégalité (15)[4]).

Lemme 2. Supposons que la fonction $f(y)$ soit continue dans un intervalle $\triangle$ et que pour deux valeurs $\bar{y}>\bar{\bar{y}}$ appartenant à $\triangle$ on ait l'inégalité

(20) $$f(\bar{y})<f(\bar{\bar{y}}).$$

Dans ces hypothèses il existe un $\mathring{y}$ appartenant à $\triangle$ et un $\delta>0$ tels que

(21) $$f(y)>f(\mathring{y}) \qquad \text{pour} \quad \mathring{y}-\delta<y<\mathring{y}.$$

---

[4]) E. Kamke: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. Chelsea Publishing Company, 1947, p. 91, Satz 5. L'inégalité (15) résulte de ce théorème en vertu de l'inégalité (13).

Démonstration. Désignons par $\mathring{y}$ la borne inférieure de y tels que

(22) $$f(y)=f(\bar{y}) \quad \text{et} \quad \bar{\bar{y}} \leqslant y \leqslant \bar{y}.$$

D'après (20) on a $\mathring{y} > \bar{\bar{y}}$ et en posant $\delta = \mathring{y} - \bar{\bar{y}}$ on aura, en vertu de la continuité de $f(y)$, l'inégalité (21).

Lemme 3. Soit donné dans le plan des variables (t, y) un ensemble ouvert G contenant à son intérieur le segment ouvert $(-\delta, 0)$ sur l'axe y, où $\delta > 0$.

Nous affirmons qu'il existe une courbe $y = \psi(t)$ continue et continument dérivable dans un voisinage unilatéral à droite de $t = 0$, située à l'intérieur de G pour $t > 0$ et telle que

(23) $$\psi(0) = 0$$

(24) $$\lim_{t \to 0+0} \psi'(t) = -\infty.$$

Démonstration. Soit y_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ une suite de points sur le segment $(-\delta, 0)$ de l'axe y telle que

(25) $$y_\nu < y_{\nu+1}, \lim_{\nu \to +\infty} y_\nu = 0.$$

Pour tout indice ν il existe un $h_\nu > 0$ tel que le rectangle R_ν défini par les inégalités

(R_ν) $$0 \leqslant t \leqslant h_\nu \quad ; \quad y_\nu \leqslant y \leqslant y_{\nu+1}.$$

est contenu à l'intérieur de G. On aura alors

(26) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu \subset G.$$

Soit $\bar{h}_\nu$ une autre suite telle que

(27) $$0 < \bar{h}_\nu < h_\nu \ ; \ \bar{h}_{\nu+1} < \bar{h}_\nu \ ; \ \lim_{\nu \to +\infty} \bar{h}_\nu = 0.$$

Joignons les points $(\bar{h}_\nu, y_\nu)$ et $(\bar{h}_{\nu+1}, y_{\nu+1})$ par un segment rectiligne S_ν. D'après (27) nous aurons alors

(28) $$S_\nu \subset R_\nu.$$

Ces segments réunis forment une ligne continue

(29) $$t = \sigma(y) \qquad \text{pour } -\delta < y < 0$$

telle que, d'après (27),

(30) $$\lim_{y\to 0-0} \sigma(y) = 0 .$$

En vertu de (28), la ligne (29) est contenue à l'intérieur de

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu$$

Dans chaque intervalle $(y_\nu , y_{\nu+1})$ on a

(31) $$\sigma'(y) = d_\nu$$

où d_ν est une constante satisfaisant à l'inégalité

(32) $$d_\nu < 0 .$$

On vérifie en outre que

(33) $$\sigma(y) = \int_0^y \sigma'(y)\, dy \qquad \text{pour} - \delta < y \leqslant 0 .$$

Conidérons maintenant les rectangles $\bar{R}_\nu$ définis par les inégalités

($\bar{R}_\nu$) $$d_\nu \leqslant t \leqslant 0 \quad ; \quad y_\nu \leqslant y \leqslant y_{\nu+1}$$

et construisons, comme tout à l'heure, une fonction $\bar{\sigma}(y)$ pour $-\delta < y \leqslant 0$ de façon que la courbe

(34) $$t = \bar{\sigma}(y) \qquad \text{pour} - \delta < y < 0$$

soit continue, située à l'intérieur de $\sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{R}_\nu$ et qu' on ait

(35) $$\lim_{y\to 0-0} \sigma(y) = 0$$

On aura donc, d'après (31) et ($\bar{R}_\nu$), dans chaque intervalle $(y_\nu , y_{\nu+1})$

(36) $$\sigma'(y) \leqslant \bar{\sigma}(y) < 0 .$$

Il en résulte qu'en posant

(37) $$\tau\ y) = \int_0^y \bar{\sigma}(y)\, dy$$

on a

(38) $$\tau(y) > 0 \qquad \text{pour} - \delta < y < 0 \ ; \ \tau(0) = 0 .$$

(39) $$\tau'(y) = \bar{\sigma}(y) < 0 \qquad \text{pour} - \delta < y < 0 .$$

(40) $$\tau(y) \leqslant \int_0^y \sigma'(y)\,dy = \sigma(y).$$

D'après (35) et (39) on a

(41) $$\tau'(0) = 0.$$

Il s'ensuit de (38) et (40) que la courbe

(42) $$t = \tau(y).$$

est contenue à l'intérieur de $\sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu$ pour $-\delta < y < 0$, puisque la courbe (29) l'était. Par conséquent, d'après (26), la courbe (42) est située à l'intérieur de G pour $-\delta < y < 0$. La fonction $\tau(y)$ est en outre continument dérivable et décroissante au sens stricte, d'après (39).

En désignant donc par $\psi(t)$ la fonction inverse à $\tau(y)$ on vérifie, d'après les propriétés de la fonction $\tau(y)$ et en particulier en vertu de (38) et (41), que la courbe $y = \psi(t)$ qui est identique à la courbe (42) remplit toutes les conditions du lemme présent.

Les lemmes qui suivent joueront le rôle principal dans les démonstrations des théorèmes du § 2.

Lemme 4. Supposons que l'ensemble Ω jouisse de la propriété P.
Supposons en plus que les seconds membres du système (1) soient continus et que la fonction $f_1(t, y_1, \ldots, y_n)$ ne soit pas croissante par rapport à y_2 dans Ω.
Dans ces hypothèses il existe un point $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ appartenant à Ω tel qu'à toute intégrale (2) du système (1) issue du point P_0 il correspond une courbe (3) passant par P_0, satisfaisant aux inégalités différentielles (4) dans un voisinage unilatéral à droite de t_0 et y remplissant l'inégalité

(43) $$\psi_1(t) > \varphi_1(t) \qquad \text{pour } t > t_0.$$

Démonstration. Il existent, par hypothèse, deux points $\overline{R}(t_0, \mathring{y}_1, \overline{y}_2, \mathring{y}_3, \ldots, \mathring{y}_n)$ et $\overline{\overline{R}}(t_0, \mathring{y}_1, \overline{\overline{y}}_2, \mathring{y}_3, \ldots, \mathring{y}_n)$ appartenant à Ω tels que $\overline{y}_2 > \overline{\overline{y}}_2$ et

(44) $$f_1(t_0, \mathring{y}_1, \overline{y}_2, \mathring{y}_3, \ldots, \mathring{y}_n) < f_1(t_0, \mathring{y}_1, \overline{\overline{y}}, \mathring{y}_3, \ldots, \mathring{y}_n).$$

L'ensemble Ω jouissant de la propriété P le segment $[\bar{R}, \bar{\bar{R}}]$ est contenu dans Ω. En vertu de (44) il existe, d'après le Lemme 2 (en posant $f(y)=f_1(t_0, \mathring{y}_1, y, \mathring{y}_3, \ldots, \mathring{y}_n)$), un $\mathring{y}_2$ et un $\delta>0$ tels que

$$(45) \qquad f_1(t_0, \mathring{y}_1, y_2, \mathring{y}_3, \ldots, \mathring{y}_n) > f_1(t_0 \mathring{y}_1, \mathring{y}_2, \mathring{y}_3, \ldots, \mathring{y}_n)$$
$$\text{pour } \mathring{y}_2-\delta<y_2<\mathring{y}_2 .$$

Soit (2) une intégrale du système (1) issue du point P_0. Introduisons maintenant la transformation, définie dans un voisinage V de P_0

$$(46) \qquad \begin{cases} T=t-t_0 . \\ Y_1=y_1-\varphi_1(t) . \\ Y_j=y_j-\mathring{y}_j+M(t-t_0) \quad , \quad (j=2,3,\ldots,n) . \end{cases}$$

où $M>0$ est une constante fixe, choisie de façon qu'on ait

$$(47) \qquad f_j(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)+M>0 \quad , \quad (j=2,3,\ldots,n) .$$

Le point $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ se transforme en point $Q_0=(0, 0, \ldots, 0)$ et le système (1) prend la forme

$$(48) \qquad Y_i'=F_i(T, Y_1, \ldots, Y_n) \quad , \quad (i=1,2,\ldots,n) .$$

où

$$(49) \qquad F_1(T, Y_1, \ldots, Y_n)= \\ =f_1[T+t_0, Y_1+\varphi_1(T+t_0), Y_2+\mathring{y}_2- \\ -MT, \ldots, Y_n+\mathring{y}_n-MT]-\varphi_1'(T+t_0)$$

$$(50) \qquad F_j(T, Y_1, \ldots, Y_n)= \\ =f_j[T+t_0, Y_1+\varphi_1(T+t_0), Y_2+\mathring{y}_2-MT, \ldots, Y_n+\mathring{y}_n- \\ -MT]+M, (j=2,3,\ldots,n).$$

Il est immédiat que la transformation (46) ainsi que la transformation inverse conservent les inégalités différentielles de la forme (4) et les inégalités ordinaires de la forme (5).

Désignons par $Y_i=\Phi_i(T)$ celle des intégrales du système (48) issue du point Q_0 qui est l'image de l'intégrale (2) par l'intermédiaire de la transformation (46). On aura alors au voisinage de $T=0$

$$(51) \qquad \Phi_1(T)\equiv 0,$$

et par conséquent

(52) $$F_1(0,0,\ldots,0)=0.$$

D'autre part, en vertu de (47) et (50)

(53) $$F_j(0,0,\ldots,0)=f_j(t_0\mathring{y}_1,\mathring{y}_2,\ldots,\mathring{y}_n)+M>0,\ (j=2,3,\ldots,n).$$

L'inégalité (45) implique, d'après (49) et (52)

(54) $$F_1(0,0,Y_2,0,\ldots,0)>0,\quad \text{pour} -\delta<Y_2<0.$$

Il en résulte, en vertu de la continuité de la fonction F_1, qu'il existe dans le plan des variables (T,Y_2) un ensemble ouvert G contenant à son intérieur le segment ouvert $(-\delta,0)$ sur l'axe Y_2 tel que

(55) $$F_1(T,0,Y_2,0,\ldots,0)>0 \qquad \text{dans } G.$$

En vertu du Lemme 3 il existe dans G une courbe $Y_2=\Psi_2(T)$ continue et continument dérivable dans un voisinage unilatéral à droite de $T=0$ telle que

(56) $$\Psi_2(0)=0.$$

(57) $$\lim_{T\to 0+0}\Psi_2'(T)=-\infty.$$

Posons ensuite

(58) $$\Psi_j(T)\equiv 0\quad,\quad (j=3,4,\ldots,n).$$

On aura alors, d'après (55)

(59) $$F_1(T,0,\Psi_2(T),\Psi_3(T),\ldots,\Psi_n(T))>0 \text{ pour } T>0.$$

dans un voisinage unilatéral à droite de $T=0$.

Il s'ensuit, selon le Lemme 1, en posant

$$f(t,y)=F_1(t,y,\Psi_2(t),\ldots,\Psi_n(t)),$$

qu'il existe une fonction $\Psi_1(T)$ satisfaisant à l'inégalité différentielle

(60) $$\Psi_1'(T)\leqslant F_1(T,\Psi_1(T),\Psi_2(T),\ldots,\Psi_n(T)) \text{ pour } T\geqslant 0.$$

dans un voisinage unilatéral, suffisamment petit, de $T=0$ et telle que

(61) $$\Psi_1(0)=0.$$

(62) $$\Psi_1(T)>0=\Phi_1(T) \qquad \text{pour } T>0.$$

D'après (53), (56), (57), (58) et (61) et en vertu de la continuité on aura dans un voisinage, unilatéral, suffisamment petit, de $T=0$.

(63) $$\Psi_j'(T)<F_j(T,\Psi_1(T),\ldots,\Psi_n(T))\ ,\ (j=2,3,\ldots,n).$$

En désignant par $y_i = \psi_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ l'image de la courbe $Y_i = \Psi_i(T)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, construite tout à l'heure, par l'intermédiaire de la transformation inverse à (46), on vérifie que la courbe $y_i = \psi_i(t)$ passe par le point $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ en vertu de (56), (58) et (61), satisfait aux inégalités différentielles (4) dans un voisinage unilatéral à droite de t_0 (en vertu de (60) et (63)) et y remplit l'inégalité (43) (d'après (62)).
Cette courbe en est donc une dont il fallait démontrer l'existence.

Lemme 5. Conservons les hypothèses du Lemme 4 relatives à l'ensemble Ω et à la continuité des fonctions f_i, et supposons que la fonction $f_1(t, y_1, \ldots, y_n)$ ne soit pas décroissante par rapport à y_2 dans Ω.
Dans ces hypothèses il existe un point $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ appartenant à Ω tel qu' à toute intégrale (2) du système (1) issue du point P_0 il correspond une courbe (3) passant par P_0, satisfaisant aux inégalités différentielles (6) dans un voisinage unilatéral à gauche de t_0 et y remplissant l'inégalité

$$(64) \qquad \psi_1(t) > \varphi_1(t) \qquad \text{pour } t < t_0.$$

Démonstration. Nous allons déduire ce lemme du Lemme 4 en introduisant la transformation

$$(65) \qquad T = -t \quad ; \quad Y_i = y_i, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

qui change le signe des inégalités différentielles de la forme (6) et conserve les inégalités ordinaires de la forme (5).
Par cette transformation le système (1) prend la forme

$$(66) \qquad Y_i' = F_i(T, Y_1, \ldots, Y_n) \quad , \quad (i = 1.2, \ldots, n)$$

où

$$(67) \quad F_i(T, Y_1, \ldots, Y_n) = -f_i(-T, Y_1, \ldots, Y_n) \, , \, (i = 1, 2, \ldots, n) \, .$$

La fonction $f_1(t, y_1, \ldots, y_n)$ n'étant pas décroissante par rapport à y_2 dans Ω il résulte de (67) que la fonction $F_1(T, Y_1, \ldots, Y_n)$ n'est pas croissante par rapport à Y_2 dans (l'ensemble Ω^* qui est l'image de l'ensemble Ω par l'intermédiaire de la transformation (65).

Il s'ensuit que le système (66) satisfait aux hypothèses du Lemme 4 dans l'ensemble Ω^* et par cosèquent il existe un point $Q_0(T_0, \mathring{Y}_1, \ldots, \mathring{Y}_n)$ appartenant à Ω^* et remplissant les conditions du Lemme 4 par rapport au système (66).

Désignons par $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ l'image du point Q_0 par l'intermédiaire de la transformation (65), c.—à.—d.

(68) $$t_0 = -T_0 \quad ; \quad \mathring{y}_i = \mathring{Y}_i \quad , \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Soit (2) une intégrale quelconque du système (1) issue du point P_0.

Son image par la transformation (65) sera une intégrale

(69) $$Y_i = \Phi_i(T) \quad , \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

du système (66) issue du point Q_0. où

(70) $$\Phi_i(T) = \varphi_i(-T) \quad , \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

En vertu du Lemme 4 il existe une courbe

(71) $$Y_i = \Psi_i(T), \ (i=1,2,\ldots,n).$$

passant par Q_0, satisfaisant aux inégalités différentielles

(72) $$\Psi_i'(T) \leqslant F_i(T, \Psi_1(T), \ldots, \Psi_n(T)), \ (i=1,2,\ldots,n).$$

dans un voisinage unilatéral à droite de $T = T_0$ et y remplissant l'inégalité

(73) $$\Psi_1(T) > \Phi_1(T) \qquad \text{pour } T > T_0.$$

En posant

(74) $$\psi_i(t) = \Psi_i(-t), \ (i=1,2,\ldots,n).$$

on vérifie, d'après (67) et (72), que la courbe $y_i = \psi_i(t)$ satisfait aux inégalités différentielles (6) dans un voisinage unilatéral à gauche de $t = t_0$ et y remplit, selon (70) et (73), l'inégalité (64).

Lemme 6. Supposons que les seconds membres du système (1) soient continus dans l'ensemble ouvert Ω contenant le point $P_0(t_0, \mathring{y}_1, \ldots, \mathring{y}_n)$ et que la fonction $f_1(t, y_1, \ldots, y_n)$ soit de classe C^1. Supposons en plus qu'on ait l'inégalité

(75) $$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)_{P_0} < 0$$

Dans ces hypothèses, pour toute intégrale (2) du système (1) issue du point P_0 il existe un système d'équations (7)

dont les seconds membres sont continus dans Ω et y satisfont aux inégalités (8), et une intégrale (3) du système (7) passant par P_0 et satisfaisant à l'inégalité (43) dans un voisinage unilatéral à droite de t_0.

Démonstration. Etant donnée une intégrale (2) du système (1) issue du point P_0 il suffit de construire le système (7), dont il est question, dans un voisinage fermé du point P_0, car on pourra ensuite prolonger les seconds membres du système obtenu sur l'ensemble Ω tout entier de façon que les fonctions g_i soient continues et satisfassent aux inégalités (8) dans Ω.

En effectuant la transformation

$$(76)\qquad T = t - t_0 \quad ; \quad Y_i = y_i - \varphi_i(t) \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

nous pouvons réduire le cas général à celui où $P_0 = (0, 0, \ldots, 0)$, toutes les fonctions $\varphi_i(t)$ remplissent les identités

$$(77)\qquad \varphi_i(t) \equiv 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et par conséquent

$$(78)\qquad f_i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après (75) il exite un $A > 0$ tel que

$$(79)\qquad -\frac{\partial f_1}{\partial y_2} > A.$$

dans un voisinage suffisamment petit de P_0. D'autre part la fonction f_1 étant, par hypothèse, de classe C^1, il existe un $B > 0$ tel que

$$(80)\qquad \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f_1}{\partial y_i} \right| < B.$$

au voisinage de P_0.

D'après (78) et (79) on a dans un voisinage V, suffisamment petit, de $t = 0$

$$(81)\qquad f_1(t, 0, -t, 0, \ldots, 0) > At \qquad \text{pour } t > 0.$$

Posons

$$(82)\qquad \psi_2(t) = -t, \psi_k(t) = -\frac{A}{2B} t, \ (k = 3, 4, \ldots, n).$$

On aura alors, d'après (80), dans le voisinage V

$$(83)\quad \begin{aligned} & f_1(t, 0, \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)) - f_1(t, 0, \psi_2(t), 0, \ldots, 0)) > \\ & > - B \frac{A}{2B} t \text{ pour } t > 0 . \end{aligned}$$

donc en vertu de (81)

$$(84)\quad f_1(t, 0, \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)) > \frac{A}{2} t > 0 \qquad \text{pour } t > 0 .$$

dans le voisinage V.

Il en résulte, selon le Lemme 1, en posant

$$f(t, y) = f_1(t, y, \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)),$$

qu'il existe une fonction $\psi_1(t)$ satisfaisant dans un voisinage, suffisamment petit, de $t = 0$ à l'équation différentielle

$$(85)\quad \psi_1'(t) = f_1(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)) - \frac{1}{2} f_1(t, 0, \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$$

et telle que

$$(86)\quad \psi_1(0) = 0$$

$$(87)\quad \psi_1(t) > 0 = \varphi_1(t) \qquad \text{pour } t > 0$$

Il suffit maintenant de poser au voisinage du point P_0

$$(88)\quad \begin{cases} g_1(t, y_1, \ldots, y_n) = f_1(t, y_1, \ldots, y_n) - \frac{1}{2} f_1(t, 0, \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } t \geqslant 0 . \\ g_1(t, y_1, \ldots, y_n) = f_1(t, y_1, \ldots, y_n) + t \qquad \text{pour } t < 0 . \\ g_2(t, y_1, \ldots, y_n) = -1 . \\ g_i(t, y_1, \ldots, y_n) = -\frac{A}{2B} , \quad (i = 3, 4, \ldots, n) . \end{cases}$$

On vérifie, d'après (78) et (84) et en vertu de la continuité, que les fonctions g_i ainsi définies satisfont aux inégalités (8) dans un voisinage, suffisamment petit, de P_0. D'autre part, d'après (82) et (85), la courbe $y_i = \psi_i(t)$ est une intégrale, issue du point P_0, du système (7) avec les seconds membres définis par (88). Cette intégrale remplit, en vertu de (87), l'inégalité (43).

Lemme 7. Conservons les hypothèses du Lemme 6 en remplaçant l'inégalité (75) par inégalité

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)_{P_0} > 0. \tag{89}$$

Dans ces hypothèses, pour toute intégrale (2) du système (1) issue du point P_0, il existe un système d'équations différentielles (7) dont les seconds membres sont continus dans Ω et y satisfont aux inégalités (9) et une intégrale (3) du système (7) passant par ce point telle que dans un voisinage unilatéral à gauche de $t = t_0$ on a l'inégalité (64).

Ce lemme découle du Lemme 6 par l'intermédiaire de la transformation (65), tout comme le Lemme 5 a résulté du Lemme 4.

§ 2.

Théorème 1. Supposons que les seconds membres du système (1) soient continus dans l'ensemble ouvert Ω jouissant de la propriété P.

Dans ces hypothèses la condition C (Introduction) est suffisante et nécessaire pour que le système (1) se prête à la majoration universelle au sens S_1^+ dans Ω.

Démonstration. La condition C est suffisante. En effet, la condition C étant remplie dans Ω, à tout point P_0 appartenant à Ω il correspond une intégrale du système (1) issue de ce point (et notamment l'intégrale supérieure à droite issue de P_0) satisfaisant à la condition M_1^+ (Introduction)[5].

La condition C est aussi nécesaire. En effet, supposons que les fonctions f_i ne remplissent pas la condition C. Nous pouvons supposer (en changeant au besoin le numérotage des variables et des fonctions) que la fonction $f_1(t, y_1, \ldots, y_n)$ ne soit pas croissante par rapport à y_2 dans Ω.

Il résulte alors du Lemme 4 que la condition énoncée dans la définition de la majoration au sens S_1^+ (Introduction) est en défaut pour un point P_0 appartenant à Ω.

---

[5]) E. Kamke: *Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Acta Math.. T. 58, p. 82, Satz 9.

Théorème 2. Dans les hypothèses du Théorème 1 la condition D (Introduction) est suffisante et nécessaire pour que le système (1) se prête à la majoration universelle au sens S_1^- dans Ω.

Démonstration. La condition est suffissante. En effet, la condition D étant remplie dans Ω, à tout point P_0 appartenant à Ω il correspond une intégrale du système (1) issue de ce point (et notamment l'intégrale supérieure à gauche issue de P_0) satisfaisant à la condition M_1^- (Introduction)[6] La condition est aussi nécessaire. En effet, supposons que la condition D ne soit pas remplie. Nous pouvons supposer que la fonction $f_1(t, y,\ldots, y_n)$ ne soit pas décroissante par rapport à y_2 dans Ω. Il résulte alors du Lemme 5 que la condition énoncée dans la définition de la majoration universelle au sens S_1^- est en défaut pour un point P_0 appartenant Ω.

En vertu de a Remarque 2 les Théorèmes 1 et 2 impliquent le suivant

Théorème 3. Dans les hypothèses du Théorème 1 la condition suffisante et nécessaire pour que le système (1) se prête à la majoration universelle au sens S_1 dans Ω consiste en ce que les fonctions $f_i(t, y_1,\ldots, y_n)$ soient de la forme (11).

Théorème 4. Supposons que les seconds membres du système (1) soient de classe C^1 dans l'ensemble ouvert Ω jouissant de la propriété P.
Dans ces hypothèses la condition suffisante et nécessaire pour que le système (1) se prète à la majoration universelle au sens S_2^+ dans Ω consiste en ce que les inégalités

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \geqslant 0 \quad . \quad i \neq j, \ (i, j = 1, 2,\ldots, n). \tag{90}$$

soient vérifiées en tout point de Ω.

Démonstration. La suffisance de la condition résulte du Théorème 1, puisque les inégalités (90) impliquent dans Ω jouissant de la propriété P la condition C.

---

[6]) E. Kamke: cf. loc. cit. 5).

La condition est aussi nécessaire. En effet, supposons que les inégalités (90) ne soient pas remplies toutes en un point P_0. Nous pouvons supposer (en changeant au besoin le numérotage des variables et des fonctions) qu'on ait l'inégalité (75). Il résulte alors du Lemme 6 que la condition énoncée dans la définition de la majoration au sens S_2^+ est en défaut pour le point P_0.

Théorème 5. Dans les hypothèses du Théorème 4 la condition suffisante et nécessaire pour que les système (1) se prête à la majoration universelle au sens S_2^- dans Ω consiste en ce que les inégalités

$$(91) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \leqslant 0 \quad , \quad i \neq j, (i,j=1,2,\ldots,n),$$

soient vérifiées en tout point de Ω.

Démonstration. La suffisance de la condition résulte du Théorème 2. La condition est aussi nécessaire. En effet, les inégalités (91) n'étant pas vérifiées toutes en un point P_0, nous pouvons supposer qu'on ait l'inégalité (89). Il s'ensuit alors du Lemme 7 que la condition énoncée dans la définition de la majoration universelle au sens S_2^- est en défaut pour le point P_0.

Les Théorèmes 4 et 5 entraînent le suivant.

Théorème 6. Dans les hypothèses du Théoréme 4 la condition nécessaire et suffisante pour que le système (1) se prête à la majoration universelle au sens S_2 dans Ω consiste en ce que les fonctions $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ soient de la forme (11).

Remarque 3. On peut définir les notions de minoration universelle analogues à celles de majoration universelle. Nous définirons à titre d'exemple la notion de la

Minoration universelle au sens U_1^+. On dira que *le système* (1) *se prête à la minoration universelle au sens U_1^+ dans Ω*, lorsqu' à tout point P_0 appartenant à Ω il correspond une intégrale (2) du système (1) issue de P_0 et remplissant la condition suivante :

Pour chaque courbe (3) passant par P_0, cotinue et satisfaisant aux inégalités différentielles (6) dans un voisinage unilatéral à droite de t_0 les inégalités

(92) $$\psi_i(t) \geqslant \varphi_i(t) \quad , \quad (i=1,2,\ldots, n)$$

sont vérifiées *dans un voisinage unilatéral à droite de* t_0.

On définit d'une façon analogue les notions de minoration au sens U_1^-, U_1, U_2^+, U_2^- et U_2

Or tous les Théorèmes 1—6 restent vrais aussi pour les notions de minoration universelle.

On obtient les théorèmes respectifs des Théorèmes 1—6 par l'intermédiaire de la transformation

(93) $$T=t \quad ; \quad Y_i=-y_i \quad , \quad (i=1,2,\ldots, n)$$

car elle transforme les inégalités différentielles de la forme

(94) $$y'_i \leqslant f_i(t, y_1,\ldots, y_n) \quad , \quad (i=1,2,\ldots, n).$$

en les inégalités de la forme

(95) $$Y'_i \geqslant F_i(T, Y_1,\ldots, Y_n) \quad , \quad (i=1,2,\ldots, n)$$

et les inégalités

(96) $$\psi_i(t) \leqslant \varphi_i(t) \quad , \quad (i=1,2,\ldots, n)$$

en les inégalités

(97) $$\Psi_i(T) \geqslant \Phi_i(T) \quad , \quad (i=1,2,\ldots, n).$$

SUR UN THÉORÈME DE M. BIERNACKI[1)]

Par
GYULA (Julius) SZ.-NAGY (Szeged, Hongrie)

§ 1. Je vais exposer ici une démonstration élémentaire du théorème suivant:

I. *Désignons par* λ *et* μ *des nombres quelconques (réels ou complexes) et par* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *des nombres positifs arbitraires et posons:*

(1) $$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

(2) $$g(z) = f(z)\left[\lambda + \mu \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{z-z_k}\right]$$

Si le cercle K

(3) $$|z-z_0| \leq r$$

contient tous les zéros du polynome $f(z)$ *alors le cercle* K_1

(4) $$|z-z_0| \leq r_1 = r\sqrt{2}$$

contient an moins $(n-1)$ *zéros du polynome* $g(z)$.

Le cercle K_1 *contient tous les zéros du polynome*

(5) $$f(z)\,g'(z) - g(z)\,f'(z)$$

c. à. d. tous les zéros, situés à distance finie, de la dérivée de la fraction rationnelle $g(z):f(z)$.

Ce théorème a été établi dans le cas ou $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, c. à. d. dans le cas des polynomes

---

[1)] L'idée fondamentale de ce travail est déjà contenue dans un article que j'ai publié en hongrois en 1942. Cependant les démonstrations actuelles sont beaucoup plus simples et plus courtes que celles d'autrefois.

$g(z) = \lambda f(z) + \mu f'(z)$ par M. Biernacki[2]. J. Dieudonné[3] a trouvé une autre démonstration de la première partie de ce théorème de Biernacki.

§ 2. On a le théorème suivant:

II. *Soient* ζ_1 *et* ζ_2 $(\zeta_1 \neq \zeta_2, \zeta_i \neq z_k$ *pour* $i = 1, 2$ *et* $k = 1, 2, \ldots, n)$ *des zéros du polynome* $g(z)$ $(\mu \neq 0)$ *et H l'hyperbole équilatère qui passe par* ζ_1 *et* ζ_2 *et dont le centre est* $\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$. *Le polynome* $f(z)$ *possède au moins un zéro dans la région du plan extérieure à l'hyperbole H et aussi au moins un zéro dans la région intérieure à cette hyperbole, à moins que tous les zéros de* $f(z)$ *ne soient pas situés sur H.*
Ce théorème est encore valable lorsque $\zeta_1 = \zeta_2$ *est un zéro multiple du polynome* $g(z)$, *tandis que* $f(\zeta_1) \neq 0$. *Dans ce cas H est un couple quelconque de droites se coupant à l'angle droit au point* ζ_1.

Dans cet énoncé la région extérieure (respectivement intérieure) à l'hyperbole *H* est le lieu des points d'où l'on peut mener deux (resp. aucune) tangentes à l'hyperbole. Chacune des régions relatives à une hyperbole *H* dégénérée $(\zeta_1 = \zeta_2)$ est un angle rectangle double dont les côtés se confondent avec les droites de *H* (il comprend deux angles droits symétriques par rapport à ζ_1).

J'ai déjà démontré[4] d'une manière élémentaire la première partie du théorème II $(\zeta_1 \neq \zeta_2)$ dans le cas des polynomes $f(z) \equiv \lambda f(z) + \mu f'(z)$. Ma démonstration est valable sans modification dans le cas où les m_k sont des nombres positifs arbitraires.

Lorsque $\zeta_1 = \zeta_2$ et $f(\zeta_1) \neq 0$ on a $g(\zeta_1) = 0$ et $g'(\zeta_1) = 0$. Donc ζ_1 est un zéro de la fraction rationnelle:

$$\frac{f(z)\, g'(z) - g(z) f'(z)}{f(z)} = \left[\frac{g(z)}{f(z)} \right]' = - \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{(z - z_k)^2}. \tag{6}$$

[2]) M. Biernacki, Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et de Lettres, Classe des Scienc. Math., Série A 1927, 541—685.

[3]) J. Dieudonné, Sur quelques points de la théorie des polynomes, Bulletin des Sciences Math., Série 2, 58 (1934), 273—296.

[4]) Gy. (J.) v. Sz. Nagy. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen, Jahresbericht der Deut. Math. Ver. 31 (1922), 238-251.

D'après un autre théorème tout aussi élémentaire que j'ai établi ailleurs[5] tous les zéros de cette fraction rationnelle sont situés dans un domaine dont la frontière est le lieu des points d'où l'on voit sous l'angle droit le plus petit polygône convexe contenant tous les points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ („konvexe Hülle" des points z_k). Si un point de la frontière du domaine en question est un zéro de la fraction rationnelle, les points z_k sont situés sur les côtés de l'angle droit. Il en résulte la deuxième partie du théorème II.

§ 3. Pour établir le théorème I nous aurons besoin du théorème II et d'un lemme géométrique que voici:

III. *Soient K et K_1 deux cercles concentriques de rayons r et $r_1 = r\sqrt{2}$ respectivement. Par chaque couple de points P_1, P_2 situés à l'extérieur du cercle K_1 il passe une hyperbole équilatère H^* dont le centre est le milieu P_0 du segment $P_1 P_2$ et qui n'a aucun point (réel) en commun avec le cercle K.*

Dans la démonstration de ce théorème nous allons dire, pour abréger, qu'une hyperbole équilatère dont le centre est P_0 et qui passe par P_1 et par P_2 est une „H-hyperbole". Si cette hyperbole n'a aucun point en commun avec K, elle sera dite une „H^*-hyperbole".

Une H-hyperbole est déterminée soit par sa tangente t_1 au point P_1, soit par ses asymptotes, sa tangente t_2 au point P_2 est parallèle à t_1. Si K est contenu entre t_1 et t_2 H-hyperbole est évidemment une H^*-hyperbole. Il s'ensuit l'exactitude du théorème III dans le cas où P_0 est situé sur la circonférence de K ou à l'intérieur de ce cercle. En effet, la longueur de ces cordes du cercle K_1 qui sont tangentes à K est $2r$; si donc P_0 est situé sur la circonférence de K où à l'intérieur de ce cercle il existe évidemment une bande comprise entre deux droites parallèles t_1 et t_2 passant par

---

5) Gy. (J.) v. Sz. Nagy, Über die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen. Acta scient. math. Szeged, 1 (1923), 127-138.

P_1 et P_2 respectivement et qui contient le cercle K. La H-hyperbole ayant la tangente t_1 est donc une H^*-hyperbole.

La démonstration du théorème III dans le cas où P_0 est situé à l'extérieur du K_1 est tout aussi aisée. Les tangentes ménées du point P_0 au cercle K font entre elles un angle aigu, il existe donc un angle rectangle double W de sommet P_0 (il comprend deux angles droits symétriques par rapport à P_0) qui ne contient aucun point de K. Si P_1 est situé dans W alors la H-hyperbole dont les asymptotes sont les cotés de W est une H^*-hyperbole.

Lorsque la demi-droite P_0P_1 coupe la circonférence de K_1 aux points Q_1 et Q_2 et lorsque Q_1 est situé entre P_0 et Q_2, P_1 est situé soit sur le segment P_0Q_1 soit en dehors du segment P_0Q_2. Dans le premier cas la H-hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces tangentes du K qui passent par Q_1 est évidemment une H^*-hyperbole. Dans le second cas il existe une H-hyperbole dont la tangente au point P_1 soit t_1 n'a pas de points communs avec K, cette hyperbole est une H^*-hyperbole.

Il ne reste donc plus qu'à établir le théorème III dans le cas où P_0 est situé dans l'anneau compris entre les circonférences K et K_1. En introduisant un système des coordonnées rectangulaires dans lesquel l'origine est au centre du K et l'axe positive Ox coincide avec la demi-droite OP_0 on obtient les relations:

$$P_0=(x_0,0), P_1=(x_1,y_1), P_2=(x_2,y_2), x_1+x_2=2x_0, y_1+y_2=0,$$
$$r<x_0\leqslant r_1=r\sqrt{2},\ x_1^2+y_1^2>r_1^2=2r^2,\ x_2^2+y_2^2>r_1^2.$$

Dans ce système de coordonnées les équations de cercles K et K_1 sont respectivement:

$$(7)\qquad x^2+y^2=r^2 \qquad\qquad x^2+y^2=r_1^2=2r^2.$$

Nous pouvons admettre que l'on a dans la démonstration du théorème III:

$$(8)\qquad x_1\leqslant x_0,\ |y_1|<r \quad \text{et} \quad r<x_1\leqslant x_0\leqslant r_1.$$

En effet, lorsque $|y_1| \geqslant r$ cette H-hyperbole dont la tangente en P_1 est parallèle à l'axe Ox est une H^*-hyperbole. Cela a lieu aussi dans le cas où $x_1 < r$ car on a alors $y_1^2 > r_1^2 - r^2 = r^2$. Lorsque $x_1 < -r$ c'est la H-hyperbole dont la tangente est parallèle à l'axe Oy qui est une H^*-hyperbole.

L'équation de la H-hyperbole symétrique par rapport à l'axe Ox s'écrit:

$$(9) \qquad y^2 - (x - x_0)^2 = y_1^2 - (x_1 - x_0)^2 \equiv A,$$

et les abscisses de ses points d'intersection avec K satisfont à l'équation:

$$(10) \qquad (x - x_0)^2 + x^2 = r^2 - A.$$

Pour que cette équation ne possède aucune racine réelle il faut et il suffit que l'on ait:

$$(11) \qquad x_0^2 + 2(r^2 - A - x_0^2) < 0, \text{ c. à. d. } \quad A + \frac{x_0^2}{2} > r^2 .$$

Or cette condition est remplie, car l'on a:

$$A = y_1^2 - (x_1 - x_0)^2 = (x_1^2 + y_1^2) - x_1^2 - (x_1 - x_0)^2 >$$
$$> r_1^2 - x_1^2 - (x_1 - x_0)^2 = r_1^2 - x_0^2 + 2x_1(x_0 - x_1) > r_1^2 - x_0^2$$

et par suite:

$$A + \frac{x_0^2}{2} > r_1^2 - \frac{x_0^2}{2} \geqslant r_1^2 - \frac{r_1^2}{2} = r^2 \cdot$$

L'hyperbole (9) est donc une H^*-hyperbole.
Le théorème III est donc complètement établi. Il est évidement valable aussi dans le cas où P_1 et P_2 se confondent avec P_0 et la H^*-hyperbole se décompose donc en deux droites perpendiculaires passant par P_0, car dans ce cas on voit le cercle K d'un point situé à l'extérieur du cercle K_1 sous un angle aigu.

§ 4. Supposons maintenant que la première partie du théorème I soit inexacte, il existerait alors un polynome g(z) de la forme (2) qui aurait au moins deux zéros (distincts

ou confondus), soit ζ_1 et ζ_2 situés à l'extérieur du cercle (4). On pourrait tracer une hyperbole équilatère H^* (pouvant se décomposer en droites) de centre $\frac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_2)$ qui passerait par des points ζ_1 et ζ_2 et qui n'aurait aucun point (réel) commun avec le cercle $|z-z_0|=r$. Il en résulterait que ce cercle et par suite tous les zéros du polynome (1), seraient situés dans une des deux régions déterminées par l'hyperbole H^*, c'est ce qui est en contradiction avec le théorème II. L'exactitude du théorème I en résulte car tout zéro situé à distance finie de la fraction rationnelle (6) est situé dans le cercle (4).

Le théorème I peut être énoncé aussi de la façon suivante: *Si les pôles de la fonction rationnelle*

$$R(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{z - z_k} \quad (m_k > 0;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont compris dans le cercle $|z-z_0| \leqslant r$, *alors* $R(z)$ *est univalente dans l'extérieur du cercle* $|z-z_0| = r\sqrt{2}$. [6])

[6]) M. Marden, On the zeros of rational functions having prescribed poles, with applications to the derivative of an entire function of finite genre, Trans. Amer. math. Soc., 66 (1949), 407—418, vient de généraliser le théorème I au cas où les coefficients m_k sont des nombres complexes compris dans un angle de sommet 0 et d'ouverture $\omega\,(<\pi)$ et λ est un polynome de degré p—1 à coefficients quelconques. Le polynome $g(z)$ a alors au plus p zéros d'où l'on voit l'enveloppe connexe de zéros de $f(z)$ sous un angle $< \frac{\pi-\omega}{p+1}$.

UNE MÉTHODE ÉLÉMENTAIRE DE RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE PLAN

Par

F. Leja (Kraków)

1. Introduction. Soit F la frontière d'un domaine plan quelconque D_∞ contenant le point à l'infini dans son intérieur, $\varphi(z)$ une fonction réelle définie et continue sur F des bornes m et M

$$m \leqslant \varphi(z) \leqslant M$$

et Δ l'ensemble (supposé non vide) complémentaire à $D_\infty + F$. Il est clair que Δ est une somme finie ou dénombrable des domaines disjoints bornés simplement connexes dont la frontière est contenue dans F.

Soit $\zeta^{(n)}$ un système de $n+1$ points différents quelconques situés sur F; $\zeta^{(n)} = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$. Désignons par $V(\zeta^{(n)}) = V(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ le produit

$$V(\zeta^{(n)}) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n} |\zeta_j - \zeta_k|, \tag{1}$$

par $L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})$ le polynome

$$L^{(j)}(z, \zeta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} \frac{z - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \tag{2}$$

et par λ un paramètre réel non négatif.

Lorsque le système $\zeta^{(n)}$ varie sur F la valeur du produit

$$V_\lambda(\zeta^{(n)}) = V(\zeta^{(n)}) \cdot e^{-n\lambda \sum_{j=0}^{n} \varphi(\zeta_j)} \tag{3}$$

reste bornée et atteint sa borne supérieure. Désignons par

$$x^{(n,\lambda)} = \{x_0^{(n,\lambda)}, x_1^{(n,\lambda)}, \ldots, x_n^{(n,\lambda)}\}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

ou plus brièvement par

$$(4') \qquad x^{(n)} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\}, \qquad n=1,2,\ldots,$$

un système de $n+1$ points de F en lequel

$$(5) \qquad V_\lambda(x^{(n)}) \equiv \sup_{\zeta^{(n)} \in F} V_\lambda(\zeta^{(n)}).$$

Un système (4) remplissant la condition (5) sera dit *système des points extrémaux* de F du rang n correspondant à $\lambda\varphi(z)$.

Les polynomes

$$(6) \qquad \Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)}) = L^{(j)}(z, x^{(n)}) \cdot e^{n\lambda\varphi\left(x_j^{(n)}\right)}, \qquad j=0,1,\ldots, n,$$

seront dits *polynomes extrémaux* du degré n associés à F et $\lambda\varphi(z)$. Je dis que ces polynomes satisfont sur F à l'inégalité

$$(7) \qquad |\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})| \leqslant e^{n\lambda\varphi(z)}, \qquad j=0,1,\ldots, n; z \in F.$$

En effet, désignons les points (4′) plus brièvement par $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et soit z un point quelconque de F. D'après (5) on a

$$V_\lambda(x_0, \ldots x_{j-1}, z, x_{j+1}, \ldots, x_n) \leqslant V_\lambda(x_0, \ldots, x_n)$$

d'où l'on conclut que

$$\Big(\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n} |z-x_k|\Big)\, e^{-n\lambda\varphi(z)} \leqslant \Big(\prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n} |x_j-x_k|\Big)\, e^{-n\lambda\varphi(x_j)}$$

et cette inégalité entraîne immédiatement l'inégalité (7).

Formons la somme de modules des polynomes extrémaux (6) et faisons varier n

$$(8) \qquad F_n(z,\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{n} |\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})|, \qquad n=1,2,\ldots$$

Il est évident que la fonction $F_n(z,\lambda)$ est positive dans le plan entier et, si $\lambda \neq 0$, la fonction

$$\frac{1}{\lambda} \log \sqrt[n]{F_n(z,\lambda)}$$

est égale à $\varphi(z)$ aux points extrémaux (4) et par suite elle constitue une approximation de la fonction donnée $\varphi(z)$ sur F.

Le but proncipal de ce travail est de démontrer que, dans l'ensemble $\Delta + F$, il existe la limite réitérée

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda}\log\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)}\right\}=\Phi(z) \tag{9}$$

et que la fonction $\Phi(z)$ constitue la solution du problème de Dirichlet pour le domaine (ou la somme de domaines) Δ et les données frontière $\varphi(z)$.

2. Premier passage à la limite. Supposons que λ soit fixe.

Théorème I. *La suite* $\left\{\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)}\right\}$ *tend dans le plan entier vers une limite finie*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)}=\Phi(z,\lambda) \tag{10}$$

sitisfaisant aux inégalités

$$\log\Phi(z,\lambda)\geqslant\lambda m \quad \textit{dans le plan entier} \tag{11}$$

$$\log\Phi(z,\lambda)\leqslant\lambda\varphi(z) \quad \textit{sur } F. \tag{12}$$

Démonstration. Soit $\zeta^{(n)}=\{\zeta_0, \zeta_1,\dots, \zeta_n\}$ un système de $n+1$ poins de F. Posons

$$\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})=L^{(j)}(z,\zeta^{(n)})\cdot e^{n\lambda\varphi(\zeta_j)},\quad j=0,1,\dots,n, \tag{13}$$

et désignons par $\Phi_n(z,\lambda)$ la borne inférieure du plus grand des modules $|\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})|$, $j=0,1,\dots,n$, lorsque (z et n étant fixes) le système $\zeta^{(n)}$ varie sur F

$$\Phi_n(z,\lambda)=\inf_{\zeta^{(n)}\varepsilon F}\left\{\max_{(j)}|\Phi^{(j)}(z,\lambda,\zeta^{(n)})|\right\},\quad n=1,2,\dots \tag{14}$$

Je dis que, quels que soient z et λ, on a

$$\Phi_{\mu+\nu}(z,\lambda)\geqslant\Phi_\mu(z,\lambda)\cdot\Phi_\nu(z,\lambda) \text{ pour } \mu \text{ et } \nu=1,2,\dots \tag{15}$$

En effet, à tout $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un système de $\mu+\nu+1$ points de F, soit

(16) $$y^{(\mu+\nu)}=\{y_0,\ldots, y_{,\mu}, y_{\mu+1},\ldots, y_{\mu+\nu}\},$$

pour lequel

(17) $$\Phi_{\mu+\nu}(z,\lambda) > \max_{(j)} |\Phi^{(j)}(z,\lambda,y^{(\mu+\nu)})| - \varepsilon.$$

Formons le produit

$$W(z,y_{i_1}, y_{i_2},\ldots, y_{i_\nu})=V(z,y_{i_1},\ldots, y_{i_\nu})\cdot e^{-\nu\lambda[\varphi(y_{i_1})+\ldots+\varphi(y_{i_\nu})]}$$

où les y_{i_k} sont des points (16) et cherchons son maximum lorsque (ν étant fixe) les y_{i_k} parcourent le système (16). On peut supposer que ce maximum soit égal à $W(z,y_{\mu+1},\ldots,y_{\mu+\nu}$ et que par suite

(18) $$W(z,y_{\mu+1},\ldots, y_{\mu+\nu}) \geqslant W(z,y_i, y_{\mu+1},\ldots y_{k-1}, y_{k+1},\ldots, y_{\mu+\nu})$$

pour

$$i=0,1,\ldots,\mu \text{ et } k=\mu+1,\ldots,\mu+\nu.$$

De (18) on déduit l'inégalité

$$|\Phi^{(i)}(z,\lambda,y^{(\nu)})| \geqslant \Phi^{(k)}(z,\lambda,y^{(\nu)})|, \text{ où } y^{(\nu)}=\{y_i, y_{\mu+1},\ldots, y_{\mu+\nu}\},$$

et comme $\max_{(k)}|\Phi^{(k)}(z,\lambda,y^{(\nu)})| \geqslant \Phi_\nu(z,\lambda)$ on a

(19) $$|\Phi^{(i)}(z,\lambda,y^{(\nu)})| \geqslant \Phi_\nu(z,\lambda) \quad \text{pour } i=0,1,\ldots,\mu.$$

Observons maintenant que si l'on pose $y^{(\mu)}=\{y_0, y_1,\ldots,y_\mu\}$ et $y^{(\nu)}=\{y_i, y_{\mu+1},\ldots, y_{\mu+\nu}\}$ on a identiquement pour $i=0,1,\ldots,\mu$

$$\Phi^{(i)}(z,\lambda,y^{(\mu+\nu)})=\Phi^{(i)}(z,\lambda,y^{(\mu)})\cdot\Phi^{(i)}(z,\lambda,y^{(\nu)})$$

donc d'après (17) et (19)

$$\Phi_{\mu+\nu}(z,\lambda)+\varepsilon \geqslant |\Phi^{(i)}(z,\lambda,y^{(\mu)})|\cdot\Phi_\nu(z,\lambda), \text{ pour } i=0,1,\ldots,\mu,$$

et par suite

$$\Phi_{\mu+\nu}(z,\lambda)+\varepsilon \geqslant \Phi_\mu(z,\lambda)\cdot\Phi_\nu(z,\lambda),$$

ce qui entraîne (15) car ε est arbitrairement petit.

Il résulte de (15) que la suite $\left\{\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)}\right\}$ tend vers une limite finie ou infinie. Posons

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)} = \Phi(z,\lambda).$$

La limite (10) existe car on a quel que soit z

$$(21) \qquad \Phi_n(z,\lambda) \leqslant F_n(z,\lambda) \leqslant (n+1)^2 \Phi_n(z,\lambda).$$

La première de ces inégalités est évidente. Pour prouver la seconde faisons correspondre à $\varepsilon > 0$ un système de points de F, soit

$$(22) \qquad y^{(n)} = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\},$$

pour lequel

$$(23) \qquad \Phi_n(z,\lambda) > \max_{(k)} |\Phi^{(k)}(z,\lambda,y^{(n)})| - \varepsilon.$$

D'après la formule d'interpolation de Lagrange on a

$$\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^{(j)}(y_k,\lambda,x^{(n)}) \cdot L^{(k)}(z,y^{(n)})$$

donc en vertu de (7)

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |L^{(k)}(z,y^{(n)})| e^{n\lambda\varphi(y_k)} = \sum_{k=0}^{n} |\Phi^{(k)}(z,\lambda,y^{(n)})|$$

et par suite d'après (23)

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})| \leqslant (n+1)\,[\Phi_n(z,\lambda) + \varepsilon],$$

ce qui entraîne l'inégalité $F_n(z,\lambda) \leqslant (n+1)^2 \Phi_n(z,\lambda)$ car ε est arbitrairement petit.

Il reste à prouver que la limite $\Phi(z,\lambda)$ est partout finie. Soit

$$\eta^{(n)} = \{\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_n\}$$

un système de $n+1$ points de F en lequel le produit (1) atteint son maximum qui sera désigné par $V_n(F)$. Parmi les produits

$$\Delta_n^{(j)} = |(\eta_j - \eta_0) \ldots (\eta_j - \eta_{j-1})(\eta_j - \eta_{j+1}) \ldots (\eta_j - \eta_n)|, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

soit $\Delta_n^{(0)}$ le plus petit. On sait[1]) que les deux suites

$$\left\{ V_n(F)^{\frac{2}{n(n+1)}} \right\} \text{ et } \left\{ \Delta_n^{(0)\frac{1}{n}} \right\}$$

---

[1]) Ce journal t. 18 (1945) p. 4—11.

tendent vers le *diamètre transfini* (*capacité*) de l'ensemble F. Désignons ce diamètre par

$$d(F)$$

et soit z un point quelconque du plan et $R(z)$ la plus grande distance de z à F. Puisque

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,\eta^{(n)})| \leqslant \frac{[R(z)]^n}{\Delta_n^{(j)}} e^{n\lambda M}$$

et que $\Phi_n(z,\lambda) \leqslant \max\limits_{(j)} |\Phi^{(j)}(z,\lambda,\eta^{(n)})|$ on a

$$\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)} \leqslant \frac{R(z)}{\sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}}} e^{\lambda M} \tag{24}$$

donc $\Phi(z,\lambda) \leqslant R(z) \cdot e^{\lambda M} : d(F)$ et par suite $\Phi(z,\lambda)$ est finie car $d(F) > 0$.

Les inégalités (11) et (12) résultent des suivantes: D'après (6) et (8) an a quel que soit z

$$F_n(z,\lambda) \geqslant \sum_{j=0}^{n} |L^{(j)}(z,x^{(n)})| e^{n\lambda m} \geqslant e^{n\lambda m} \tag{25}$$

et d'après (7) on a sur F

$$F_n(z,\lambda) \leqslant (n+1)\, e^{n\lambda\varphi(z)} \tag{26}$$

Le théorème est donc démontré.

Remarque. Les fonctions $F_n(z,\lambda)$, $\Phi_n(z,\lambda)$ et $\Phi(z,\lambda)$ dépendent de $\lambda\varphi(z)$ et seront désignées aussi par

$$F_n(z,\lambda\varphi),\ \Phi_n(z,\lambda\varphi) \text{ et } \Phi(z,\lambda\varphi).$$

Observons que, si $\psi(z)$ est une fonction définie sur F et si $\varphi(z) \geqslant \psi(z)$ sur F, on a d'après (14) en chaque point du plan $\Phi_n(z,\lambda\varphi) \geqslant \Phi_n(z,\lambda\psi)$ donc

$$\Phi(z,\lambda\varphi) \geqslant \Phi(z,\lambda\psi) \qquad \text{si } \varphi \geqslant \psi \text{ sur } F.$$

Observons encore qe la continuité de la fonction $\varphi(z)$ sur F n'est pas nécesaire pour l'existence des fonctions (14). Il suffit pour ce but que $\varphi(z)$ soit bornée sur F et on constate aisément que la limite (20) existe dans ce cas général.

3. Propositions auxiliaires. J'aurai à m'appuyer sur deux lemmes démontrés ailleurs. Soit C un continu plan quelconque[2]) et z_0 un point de C.

Lemme 1[3]). *A tout* $\varepsilon > 0$ *correspondent deux nombres positifs* δ *et* N *tels que toute suite de polynomes* $\{P_n(z)\}$, *où le degré de* $P_n(z)$ *est* $\leqslant n$, *remplissant sur* C *la condition*

$$|P_n(z)| \leqslant M, \quad \text{où } M \text{ est une constante et } n = 1, 2, \ldots$$

remplit dans le cercle $|z - z_0| < \delta$ *la condition*

$$|P_n(z)| < M(1+\epsilon)^n \qquad \text{pour } n > N.$$

Soit $\{\zeta_j^{(n)}\}$, où $j = 0, 1, \ldots, n$ et $n = 1, 2, \ldots$, une suite triangulaire des points situés sur F tels que les points de chaque système $\zeta^{(n)} = \{\zeta_0^{(n)}, \zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}\}$ soient différents entre eux. Formons les $n+1$ polynomes (2) correspondant à $\zeta^{(n)}$ et soit z_0 un point quelconque de F, r un nombre positif et $M(z_0, r, \zeta^{(n)})$ le plus grand de ceux des modules

$$|L^{(j)}(z_0, \zeta^{(n)})|, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

pour lesquels le point $\zeta_j^{(n)}$ est contenu dans le cercle $|z - z_0| < r$. Si aucun des points $\zeta_0^{(n)}, \zeta_1^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ n'appartient au cercle $|z - z_0| < r$ posons $M(z_0, r, \zeta^{(n)}) = 0$.

Lemme 2. *Lorsque* z_0 *est un point d'accumulation de la suite triangulaire* $\{\zeta_j^{(n)}\}$ *on a quel que soit* $r > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M(z_0, r, \zeta^{(n)})} \geqslant 1. \tag{28}$$

La démonstration de ce lemme est donnée implicitement dans le travail inséré dans les Annales Soc. Polon. de Math. t. 21 (1948), p. 80—89.

Les points extrémaux (4), où λ est fixe et $n = 1, 2, \ldots$ forment une suite triangulaire $\{x_j^{(n,\lambda)}\}$. Désignons par

$$F_\lambda$$

l'ensemble des points d'accumulation de cette suite. Le lemme 2 entraîne la conclusion suivante:

---

[2]) Ne se réduisant pas à un seul point.

[3]) Pour la démonstration cf. Math. Ann. t, 108 (1933) p. 520.

Corollaire. *En chaque point z_0 de F_λ on a*

(29) $$\Phi(z_0, \lambda) = e^{\lambda\varphi(z_0)}.$$

En effet, $\varphi(z)$ étant continue en z_0, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un cercle $K\{|z - z_0| < r\}$ tel que $\varphi(z) > \varphi(z_0) - \varepsilon$ si $z \in F.K$, donc si le point $x_j^{(n)}$ du systéme (4') est contenu dans $F.K$ on a d'après (6) quel que soit z

$$|\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})| > |L^{(j)}(z, x^{(n)})| e^{n\lambda[\varphi(z_0) - \varepsilon]}$$

et par suite

$$F_n(z_0, \lambda) > M(z_0, r, x^{(n)}) \cdot e^{n\lambda[\varphi(z_0) - \varepsilon]}$$

Il en résulte d'après (10) et (28) que $\Phi(z_0, \lambda) \geqslant e^{\lambda[\varphi(z_0) - \varepsilon]}$ d'où l'on conclut que $\Phi(z_0, \lambda) \geqslant e^{\lambda\varphi(z_0)}$. D'autre part, il suit de (12) que $\Phi(z_0, \lambda) \leqslant e^{\lambda\varphi(z_0)}$ donc l'égalité (29) est démontrée.

Nous supposerons dans la suite pour simplifier que F soit une somme des continus[4]).

Observons que, si $\lambda = 0$ ou si λ étant quelconque la fonction $\varphi(z)$ est constante sur F, les points extrémaux (4') sont repartis sur F de manière que le produit $V(x^{(n)})$ soit le plus grand. En vertu de principe de maximum les points de la suite triangulaire (4) forment alors un ensemble partout dense sur F et par suite l'ensemle F_λ couvre F, c'est-à-dire

$$F_\lambda = F.$$

Lorsque $\lambda > 0$ et $\varphi(z)$ n'est pas constante, la différence $F - F_\lambda$ n'est pas en général vide. Néanmoins, lorsque λ décroit l'ensemble F_λ augmente (ne diminue pas) et la distance $\delta(z_0, F_\lambda)$ d'un point quelconque z_0 de F à F_λ tend vers zéro avec λ.

En effet, si $\delta(z_0, F_\lambda)$ ne tendait pas vers zéro avec λ, presque tous les points de la suite triangulaire (4') seraient situés sur une partie fermée E de F à distance positive

[4]) La frontière de Δ remplit manifestement toujours cette hypothèse.

de z_0. Par suite, en désignant par $V_n(E)$ la borne supérieure de $V(\zeta^{(n)})$ lorsque $\zeta^{(n)}$ parcourt E, on aurait

$$V_\lambda(x^{(n)}) \leqslant V(x^{(n)}) \cdot e^{-n(n+1)\lambda m} \leqslant V_n(E) \cdot e^{-n(n+1)\lambda m}.$$

D'autre part, on a d'après (5)

$$(29') \qquad V_\lambda(x^{(n)}) \geqslant V_n(F) \cdot e^{-n(n+1)\lambda M}$$

et par suite

$$e^{n(n+1)\lambda(M-m)} \geqslant V_n(F)/V_n(E).$$

On en conclut que $2\lambda(M-m \geqslant \log[d(F)/d(E)]$ donc λ reste plus grand qu'un nombre positif car $d(F) > d(E)$.

Observons encore que, si $\varphi(z)$ est constante dans un voisinage d'un point z_0 de F[5]), alors en vertu du principe de maximum l'ensemble F_λ couvre un voisinage plus petit de z_0 dès que λ est suffisamment petit.

Désignons, comme plus haut, par $V_n(F)$ la borne supérieure du produit (1), par $V_{n\lambda}(F)$ la borne (5) et par $d(F)$ et $d_\lambda(F)$ les limites[6])

$$d(F) = \lim_{n\to\infty} V_n(F)^{\frac{2}{n(n+1)}}, \quad d_\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} V_{n\lambda}(F)^{\frac{2}{n(n+1)}}.$$

Il suit de (29') que $d_\lambda(F) \geqslant d(F) e^{-2\lambda M}$. D'autre part, étant d'après (3)

$$V_\lambda(\zeta^{(n)}) \leqslant V(\zeta^{(n)})\, e^{-n(n+1)\lambda m}$$

on en déduit l'inégalité $d_\lambda(F) \leqslant d(F) \cdot e^{-2\lambda m}$, donc lorsque $\lambda \to 0$ on a $d_\lambda(F) \to d(F)$.

4. Propriétés des fonctions $\Phi(z,\lambda)$. Supposons comme plus haut que λ soit fixe.

Théorème II. *La fonction*

$$(30) \qquad \log \Phi(z,\lambda)$$

est 1° harmonique dans le plan entier en dehors de la partie F_λ de F et 2° continue en tout point de F_λ.

---

[5]) C'est-à-dire dans l'ensemble F.K, où K est un cercle de centre z_0.

[6]) La démonstration de l'existence de la seconde de ces limites est analogue à celle de la première [cf. M. Feketc, Math. Z., t. 17 (1923) p. 228—249].

Démonstration. 1° Désignons les points extrémaux (4) plus brièvement par

$$x^{(n)} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

et supposons que leurs indices soient choisis de manière que parmi les $n+1$ produits

$$A^{(j)}(x^{(n)}) = \Big(\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} |x_j - x_k|\Big)\, e^{-n\lambda\varphi(x_j)}, \quad j=0,1,\ldots,n,$$

$A^{(0)}(x^{(n)})$ soit le plus petit. Soit z un point quelconque du plan non situé sur F_λ et $r(z)$ et $R(z)$ la plus petite et la plus grande distance de z à F_λ. Les polynomes extrémaux (6) satisfont aux relations

$$\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)}) = \Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)}) \cdot \frac{A^{(0)}(x^{(n)})}{A^{(j)}(x^{(n)})} \cdot \frac{z-x_0}{z-x_j}, \quad j=0,1,\ldots,n,$$

donc

$$|\Phi^{(j)}(z,\lambda,x^{(n)})| \leqslant |\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})| \, \frac{R(z)}{r(z)} \cdot$$

et par suite

$$(31) \qquad \frac{1}{n+1}\,\frac{r(z)}{R(z)}\, F_n(z,\lambda) \leqslant |\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})| \leqslant F_n(z,\lambda).$$

Il en résulte d'après le théorème I que la suite

$$(32) \qquad \log \sqrt[n]{|\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})|}, \qquad n=1,2,\ldots$$

converge en dehors de F_λ vers $\log \Phi(z,\lambda)$.

Soit G un domaine borné quelconque à distance positive de F_λ, r la distance de G à F_λ et R le diamètre (proprement dit) de $G+F_\lambda$. D'après (31), (21), (24), et (25) on a dans G

$$\sqrt[n]{\frac{r}{(n+1)R}} \cdot e^{\lambda m} \leqslant \sqrt[n]{|\Phi^{(0)}(z,\lambda,x^{(n)})|} \leqslant \sqrt[n]{(n+1)^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{\Delta_n^{(0)}}} \cdot e^{\lambda M}$$

donc la suite (32) est uniformément bornée dans G ce qui prouve que la limite $\log \Phi(z,\lambda)$ est harmonique dans G car les fonctions (32) y sont harmoniques dès que n est suffisamment grand.

2° Je dis que la fonction $\Phi(z,\lambda)$ est **semi-continue inférieurement** en tout point du plan.

En effet, soient k et n deux nombres naturels quelconques. D'après (15) on a quel que soit z

$$\Phi_{kn}(z,\lambda) \geqslant [\Phi_n(z,\lambda)]^k$$

donc

$$\sqrt[kn]{\Phi_{kn}(z,\lambda)} \geqslant \sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)}$$

et par suite, lorsque $k \to \infty$,

(33) $$\Phi(z,\lambda) \geqslant \sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)} \quad \text{pour } n=1,2,\ldots$$

Comme d'après (21) $\Phi_n(z,\lambda) \geqslant F_n(z,\lambda):(n+1)^2$ on a

$$\Phi(z,\lambda) \geqslant c_n \sqrt[n]{F_n(z,\lambda)} \quad \text{où } c_n = \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^2}}$$

donc, z_0 étant un point fixe quelconque du plan,

$$\Phi(z,\lambda) \geqslant c_n \sqrt[n]{F_n(z_0,\lambda)} + c_n \left[\sqrt[n]{F_n(z,\lambda)} - \sqrt[n]{F_n(z_0,\lambda)}\right].$$

Observons maintenant que $c_n \sqrt[n]{F_n(z_0,\lambda)} \to \Phi(z_0,\lambda)$ donc à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre N tel que $c_N \sqrt[N]{F_N(z_0,\lambda)} > \Phi(z_0,\lambda) - \varepsilon/2$ et par suite

$$\Phi(z,\lambda) > \Phi(z_0,\lambda) - \frac{\varepsilon}{2} + c_N \left[\sqrt[N]{F_N(z,\lambda)} - \sqrt[N]{F_N(z_0,\lambda)}\right].$$

D'autre part, la fonction $\sqrt[N]{F_N(z,\lambda)}$ étant continue en z_0 il existe un voisinage $|z-z_0| < \delta$ de z_0 dans lequel

$$c_N \left[\sqrt[N]{F_N(z,\lambda)} - \sqrt[N]{F_N(z_0,\lambda)}\right] > -\frac{\varepsilon}{2}$$

donc

(34) $$\Phi(z,\lambda) > \Phi(z_0,\lambda) - \varepsilon \quad \text{lorsque } |z-z_0| < \delta.$$

Il suffit de prouver encore que la fonction $\Phi(z,\lambda)$ est **semi-continue supérieurement** en tout point z_0 de F_λ. Pour ce but observons que $\varphi(z)$ est continue en z_0 donc à tout $\eta > 0$ correspond un cercle $K\{|z-z_0| < r\}$

tel que, si l'on désigne par γ le produit $F.K$, on aura sur γ

$$\varphi(z) < \varphi(z_0) + \eta$$

et par suite d'après (7)

$$|\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})| < e^{n\lambda[\varphi(z_0)+\eta]}, \text{ pour } z \in \gamma,\ n=1,2,\ldots$$

Il en resulte que les modules des polynomes

$$\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)}) \cdot e^{-n\lambda[\varphi(z_0)+\eta]},\ j=0,1,\ldots,n \text{ et } n=1,2,\ldots$$

sont uniformément bornés par le nombre 1 sur un continu passant par z_0.

Or, d'après le lemme 1 à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre N et un voisinage $|z - z_0| < \delta$ dans lequel

$$|\Phi^{(j)}(z, \lambda, x^{(n)})|\, e^{-n\lambda[\varphi(z_0)+\eta]} < (1+\varepsilon)^n \text{ pour } n > N, j=0,1,\ldots,n.$$

donc

$$F_n(z, \lambda) < (n+1)(1+\epsilon)^n e^{n\lambda[\varphi(z_0)+\eta]}, \text{ pour } n > N, |z - z_0| < \delta,$$

et par suite d'après (10) et (29)

$$\Phi(z, \lambda) \leqslant (1+\epsilon) e^{\lambda\eta} \cdot \Phi(z_0, \lambda) \quad \text{pour } |z - z_0| < \delta \tag{35}$$

ce qui prouve que $\Phi(z, \lambda)$ est semi-continue supérieurement en z_0. Le théorème est donc démontré.

Cas particulier. Dans le cas $\lambda = 0$ la fonction (30) ne dépend pas de la fonction frontière $\varphi(z)$ et il suit de (11) et (12) que

$$\log \Phi(z, 0) \tag{36}$$

s'annulle en tout point de F. D'autre part, lorsque $z \to \infty$ la fonction (36) tend vers l'infini et y possède un pole simple car les fonctions (32) ont pour $\lambda = 0$ la forme

$$\frac{1}{n} \log \left| \frac{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} \right| \quad \text{où } x_k = x_k^{(n)}$$

et possèdent à l'infini un pôle simple. Il en resulte que:

La fonction (36) *est égale dans le domaine* D_∞ *à la fonction de Green de ce domaine et de pôle à l'infini;*

dans le domaine complémentaire Δ et sur F elle est identiquement nulle.[7])

Pour marquer la dépendance de la fonction $\Phi(z, \lambda)$ de l'ensemble F désignons la par $\Phi(z, \lambda; F)$. En partant des formules (8) et (14) on peut prouver que dans le plan entier on a

$$(37)\qquad \log\Phi(z, 0; F_\lambda)+\lambda m \leqslant \log\Phi(z, \lambda; F) \leqslant \log\Phi(z, 0; F_\lambda)+\lambda M$$

où la signification de $\log \Phi(z,0; F_\lambda)$ est analogue á celle de la fonction (36).

5. Second passage à la limite. Nous allons examiner le comportement de la famille de fonctions harmoniques

$$(38)\qquad \frac{1}{\lambda}\log\Phi(z, \lambda), \qquad 0<\lambda<\infty,$$

lorsque $\lambda\to 0$. Je dis qu'on a dans le plan entier

$$(39)\qquad \frac{1}{\lambda}\log\Phi(z, \lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda'}\log\Phi(z, \lambda') \qquad \text{si } 0<\lambda<\lambda'.$$

En effet, lorsque $z\to\infty$ toutes les fonctions (32) tendent vers l'infini donc de même $\Phi z, \lambda)\to\infty$. Soit $R>0$ un nombre si grand qu'on ait

$$\Phi(z, \lambda) > e^M \qquad \text{pour } |z| \geqslant R$$

et que $\Delta+F$ soit continu à l'intérieur de la circonférence $C\{|z|=R\}$. D'après (10) à tout point z et à $\varepsilon>0$ correspond un nombre N tel que, si $n>N$, on a

$$\sqrt[n]{F_n(z, \lambda)} < (1+\varepsilon)^\lambda \cdot \Phi(z, \lambda)$$

et à fortiori

$$|L^{(j)}(z, x^{(n)})|\, e^{n\lambda\varphi(x_j)} < (1+\varepsilon)^{n\lambda} \cdot \Phi(z, \lambda)^n, \qquad j=0,1,\dots,n,$$

où $x_j = x_j^{(n)} = x_j^{(n,\lambda)}$. Lorsque z est situé sur C on a $\Phi(z, \lambda) > e^{\varphi(x_j)}$ donc étant $\lambda<\lambda'$ on a

[7]) Dans le cas général. où la frontière F est quelconque, $\log \Phi(z,0)$ est la fonction de Green généralisée de D_∞.

$$|L^{(j)}(z, x^{(n)})| < [(1+\varepsilon)\Phi(z,\lambda)^{1/\lambda}/e^{\varphi(x_j)}]^{n\lambda}$$
$$< [(1+\varepsilon)\Phi(z,\lambda)^{1/\lambda}/e^{\varphi(x_j)}]^{n\lambda'}$$

Il s'ensuit que

$$|\Phi^{(j)}(z, \lambda', x^{(n)})| < [(1+\varepsilon)\Phi(z,\lambda)^{1/\lambda}]^{n\lambda'}, \qquad j = 0, 1, \ldots n,$$

et comme $\Phi_n(z, \lambda') \leqslant \max\limits_{(j)} |\Phi^{(j)}(z, \lambda', x^{(n)})|$ on trouve

$$\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda')}^{1/\lambda'} < (1+\varepsilon)\,\Phi(z,\lambda)^{1/\lambda} \qquad \text{pour } n > N,$$

d'où l'on déduit l'inégalité (39) sur C car ε est arbitrairement petit.

L'inégalité (39) a lieu aussi sur F_λ car sur F_λ son premier membre $= \varphi(z)$ d'après (29) et le second est $\leqslant \varphi(z)$ d'après (12). En dehors de F_λ le deux membres sont harmoniques d'après le théorème II car $F_\lambda \supset F_{\lambda'}$ donc d'après le principe d'extremum l'inégalité (39) a lieu dans le cercle $|z| \leqslant R$ et, comme R est arbitrairement grand, dans le plan entier.

Théorème III. *Dans l'ensemble $\Delta + F$ il existe la limite finie*

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\{ \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z,\lambda) \right\} = \Phi(z). \tag{40}$$

La fonction $\Phi(z)$ est harmonique dans Δ, continue dans $\Delta + F$ et égale à $\varphi(z)$ sur F[8]).

D é m o n s t r a t i o n. La famille (38) est uniformément bornée sur F d'après (11) et (12), donc la limite (40) existe dans Δ et la fonction $\Phi(z)$ y est harmonique d'après (39) et le théorème connu de Harnack.

Soit z_0 un point de F et $\varepsilon > 0$. Puisque $\varphi(z)$ est continue en z_0 il existe un cercle K de centre z_0 tel que $\varphi(z) > \varphi(z_0) - \varepsilon$ dans l'ensemble $F.K$. Désignons par $\psi(z)$ la fonction définie sur F comme il suit:

---

[8]) La limite (40) existe aussi dans le domaine D_∞, mais elle y est partout infinie.

$$\psi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{si } \varphi(z) \leqslant \varphi(z_0) - \varepsilon, \\ \varphi(z_0) - \varepsilon & \text{si } \varphi(z) > \varphi(z_0) - \varepsilon. \end{cases}$$

On sait que, quels que soient z et λ, on a $\Phi(z, \lambda\varphi) \geqslant \Phi(z, \lambda\psi)$ et lorsque λ est suffisamment petit, soit $\lambda < \lambda(z_0, \varepsilon)$, l'ensemble F_λ correspondant à $\psi(z)$ couvre un voisinage $V(z_0, \varepsilon)$ de z_0 sur F donc lorsque $z \epsilon V(z_0, \varepsilon)$ et $\lambda < \lambda(z_0, \varepsilon)$ on a d'après (29)

$$\Phi(z, \lambda\varphi) \geqslant \Phi(z, \lambda\psi) = e^{\lambda[\varphi(z_0) - \varepsilon]}.$$

On en conclut d'après le théorème connu de Borel qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $\lambda(\varepsilon) > 0$ tel que, si $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$, on a sur F

$$\Phi(z, \lambda\varphi) \geqslant e^{\lambda[\varphi(z) - \varepsilon]}$$

donc en tenant compte de (12) on a sur F

$$\varphi(z) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda\varphi) \leqslant \varphi(z) \quad \text{pour } \lambda < \lambda(\varepsilon)$$

Il en résulte que la convergence (40) est uniforme dans $\Delta + F$ et par suite la fonction $\Phi(z)$ jouit des propriétés demandées.

6. Conclusion et remarques. Il suit du théorème précédent que le problème de Dirichlet pour un domaine borné simplement connexe quelconque dont la frontière est contenue dans la frontière de son domaine complémentaire D_∞ admet toujours une solution[9]).

La formule (9) donne le moyen de construire cette solution pour tous les domaines complémentaires à D_∞ en même temps. Il suffit pour ce but de trouver sur la frontière de D_∞ les points extrémaux correspondants à la fonction frontière donnée.

---

[9]) La formule (20) a été démontrée dans mon travail antérieur (Bull. Acad. Polon., Kraków 1936, p. 79—91). En partant de cette formule M. Masao Inoue (Proc. Imp. Acad. Tokyo, vol. XIII, p. 352—357) le prémier a prouvé que la limite (40) existe et donne la soluton du problème de Dirichlet lorsque F est une courbe fermé de Jordan. Dans sa démonstration l'auteur admet comme le fait connu que le problème de Dirichlet pour l'interieur d'une courbe de Jordan F possède une solution.

Cette méthode est susceptible de généralisations. Dans le cas des domaines plans multiplement connexes on doit remplacer les polynomes (6) pas des fonctions rationnelles de la forme

$$L^{(j)}(z, x^{(n)}) \left[\frac{p(x_j)}{p(z)}\right]^n e^{n\lambda\varphi(x_j)}, \qquad j=0, 1, \dots, n,$$

où $p(z)$ est une puissance d'un polynome convenablement choisi. Ce cas général sera l'objet d'un autre travail.

Państwowy Instytut Matematyczny.

SUR LES PUISSANCES DU NOMBRE 2

Par

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)[1]

M. H. Uhler a publié récemment dans les *Scripta Mathematica* vol. 15 (1949), p. 247—251 une note, dans laquelle il donne des valeurs des nombres 2^n pour certaines grandes valeurs de n (comme $n=1000, 2000, 3000, 4001$).

Le but de cette Note est de démontrer deux théorèmes sur les nombres 2^n.

Théorème 1. *Soit k un nombre naturel donné. Les restes modulo 10^k des nombres 2^n ($n=1, 2, \ldots$) forment une suite infinie périodique, où la (plus courte) période a 4.5^{k-1} termes dont le premier est 2^k.*

Pour démontrer notre théorème nous prouverons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *k étant un nombre naturel, le nombre 2 appartient pour le module 5^k à l'exposant $4.\,5^{k-1}$.*

Démonstration du lemme. Soit δ l'exposant auquel appartient le nombre 2 pour le module 5^k [c.-à.-d. soit δ le plus petit nombre naturel tel que $2^\delta \equiv 1 \pmod{5^k}$]. Comme on sait, on a $\delta \mid \varphi(5^k)$, donc $\delta \mid 4.\,5^{k-1}$. Pour $k=1$ on a évidement $\delta=4$; notre lemme est donc vrai pour $k=1$ et nous pouvons supposer plus loin que $k>1$.

S'il était $\delta < 4.5^{k-1}$, on aurait soit $\delta \mid 4.\,5^{k-2}$, soit $\delta \mid 2.\,5^{k-1}$

Suposons qu'on a pour un nombre naturel $k \geqslant 2$

$$(1) \qquad 2^{4.5^{k-2}} \equiv 1+3\;5^{k-1} (mod\;\;5^k)$$

(ce qui est évidemment vrai pour $k=2$, vu que $2^4=1+3.5$). Comme $k \geqslant 2$, on a $k-1 \geqslant 1$, d'où $j\,(k-1)=k-1+(j-1)(k-1) \geqslant k$ pour $j=2,3,4$, et $5(k-1)=k-1+4(k-1) \geqslant k-1+4>k+1$.

---

[1]) Communication présentée à la séance de la Société Polonaise de Mathématique, Section de Varsovie, le 2 Juin 1950.

Or, on a

$(1+3\cdot5^{k-1})^5=1+3\cdot5^k+2\cdot5\cdot3^2\cdot5^{2(k-1)}+2\cdot5\cdot3^3\cdot5^{3(k-1)}+5\cdot3^4\cdot5^{4(k-1)}$ $+3^5\cdot5^{5(k-1)}$, et on voit que tous les termes à droite, sauf les deux premiers, sont divisibles par 5^{k+1}. On trouve ainsi

(2) $$(1+3\cdot5^{k-1})^5\equiv1+3\cdot5^k \ (mod\ 5^{k+1}).$$

Or, si l'on a $a\equiv b$ (mod 5^k), il existe un entier t tel que $a=b+5^kt$, d'où

$$a^5=(b+5^kt)^5=b^5+5\cdot5^kt+\ldots+5^{5k}t^5\equiv b^5 \ (\text{mod } 5^{k+1}):$$

les formules (1) et (2) donnent donc

$$2^{4\cdot5^{k-1}}\equiv(1+3\cdot5^{k-1})^5\equiv1+3\cdot5^k \ (mod\ 5^{k-1}).$$

La formule (1) est ainsi démontrée par l'induction pour tout k naturel $\geqslant 2$.

D'aprés (1) on a

(3) $$2^{4\cdot5^{k-2}}\not\equiv1 \ (\text{mod } 5^k), \text{ pour } k\geqslant2,$$

ce qui prouve qu'il ne peut pas être $\delta|4\cdot5^{k-2}$. D'après (3) on a

(4) $$2^{4\cdot5^{k-1}}\not\equiv1 \ (mod\ 5^{k+1}), \text{ pour } k\geqslant1.$$

On a

(5) $$2^{4\cdot5k-1}-1=(2^{2\cdot5k-1}-1)(2^{2\cdot5^{k-1}}+1);$$

d'après (4) le côté droit de (5) n'est pas divisible par 5^{k+1} et, comme $2^2\equiv-1$ (mod 5), d'où $2^{2\cdot5^{k-1}}+1\equiv(-1)^{5^{k-1}}+$ $+1\equiv0$ (mod 5), le premier facteur à droite ne peut pas être divisible par 5^k, c. à. d. on a

$$2^{2\cdot5^{k-1}}\not\equiv1 \ (mod\ 5^k),$$

d'où il résulte qu'il ne peut pas être $\delta|2\cdot5^{k-1}$.

On n'a pas donc ni $\delta|4\cdot5^{k-2}$, ni $\delta|2\cdot5^{k-1}$ et, comme $\delta|4\cdot5^{k-1}$, il en résulte que $\delta=4\cdot5^{k-1}$.

Notre lemme se trouve ainsi démontré.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 1. Désignons, pour k et n naturels, par $r_n^{(k)}$ le reste modulo 10^k du nombre 2^n.

D'après le théorème d'E u l e r on a, pour k naturels:

$$2^{4\cdot 5^{k-1}} \equiv 1 \ (mod\ 5^k),$$

d'où:

$$2^{4\cdot 5^{k-1}+k} \equiv 2^k \ (mod\ 10^k)$$

et il en résulte tout de suite que

$$2^{4\cdot 5^{k-1}+n} \equiv 2^n \ (mod\ 10^k) \quad \text{pour } n \geqslant k,$$

c'est-à-dire

$$r_{n+4\cdot 5^{k-1}}^{(k)} = r_n^{(k)} \quad \text{pour } n \geqslant k.$$

Si l'on avait

$$r_{k-1+4\cdot 5^{k-1}}^{(k)} = r_{k-1}^{(k)},$$

on aurait (vu la définition des nombres $r_n^{(k)}$)

$$2^{k-1+4\cdot 5^{k-1}} \equiv 2^{k-1} \ (mod\ 10^k),$$

d'où

$$2^k \mid 2^{k-1}(2^{4\cdot 5^{k-1}} - 1),$$

ce qui est impossible. La suite infinie $r_1^{(k)}$ $r_2^{(k)}, \ldots$ est donc périodique et le premier terme de la période est $r_k^{(k)}$.

Admettons maintenant qu'il existe un nombre naturel $m < 4\cdot 5^{k-1}$, tel que

$$r_{n+m}^{(k)} = r_n^{(k)} \quad \text{pour } n \geqslant k.$$

On aurait donc

$$2^{n+m} \equiv 2^n \ (mod\ 10^k) \ \text{pour } n \geqslant k$$

donc, en particulier, pour $n = k$:

$$2^{k+m} \equiv 2^k \ (mod\ 10^k),$$

ce qui donne

$$2^m \equiv 1 \ (mod\ 5^k),$$

ce qui est impossible pour $m < 4\cdot 5^{k-1}$, d'après le lemme.

Nous avons ainsi démontré que la plus petite période de la suite $r_1^{(k)}$ $r_2^{(k)}, \ldots$ a $4\cdot 5^{k-1}$ termes.
Le théorème 1 est ainsi démontré.

Il en résulte tout de suite que, pour k naturel donné, les k-ièmes chiffres (en comptant de droite à gauche) des nombres 2^n $(n=1,2,\ldots)$ forment une suite périodique (à partir du k-ième terme), où le nombre de termes de la plus courte période est un diviseur du nombre $4\cdot 5^{k-1}$. Pour $k=1$ cette période est formée de quatre chiffres 2, 4, 8, 6 ; pour $k=2$ elle est formée de 20 chiffres

0, 0, 1, 3, 6, 2, 5 1, 2, 4, 9, 9, 8, 6, 3, 7, 4, 8, 7, 5.

Pour $k=3$ la période a 100 termes.

Il est à remarquer que le troisième et le deuxième chiffre (en comptant de droite à gauche) des nombres $2^n(n=3,4,\ldots)$ pris ensemble forment une suite périodique où la période a 100 termes qui présentent (dans un certain ordre) tous les entiers non négatifs < 100. C'est la suite

00, 01, 03, 06, 12, 25, 51, 02, 04, 09, 19, 38, 76, 53, 07, 14, 28, 57, 15, 30, 60, 21, 43, 86, 72, 45, 91, 82, 64, 29, 59, 18, 36, 73, 47, 94, 88, 77, 55, 10, 20, 41, 83, 66, 32, 65, 31, 62, 24, 49, 99, 98, 96, 93, 87, 74, 48, 97, 95, 90, 80, 61, 23, 46, 92, 85, 71, 42, 84, 69, 39, 78, 56, 13, 27, 54, 08, 17, 35, 70, 40, 81, 63, 26, 52, 05, 11, 22, 44, 89, 79, 58, 16, 33, 67, 34, 68, 37, 75, 50.

Notons encore que les dernières chiffres des nombres n^n $(n=1, 2,\ldots)$ forment une suite périodique dont la plus courte période a 20 termes et que, pour tout m naturel les restes modulo m des nombres n^n $(n=1, 2,\ldots)$ forment une suite périodique.

Théorème 2. *m étant un nombre naturel quelconque et s—le nombre des chiffres du nombre m* (en représentation décimale), *il existe un nombre naturel n tel que les s premiers chiffres du nombre* 2^n *coïncident respectivement avec ces du nombre m*

Lemme. *α étant un nombre irrationnel* >0 *et a et b étant deux nombres réels, tels que* $0<a<b$, *il existe un nombre naturel n et un entier* $k\geqslant 0$, *tels que*

(6) $$a<n\alpha-k<b.$$

D é m o n s t r a t i o n du lemme. Soit q un nombre naturel tel que

(7) $$\frac{1}{q} < b - a$$

et soit r un nombre naturel $> \frac{b}{a}$. Les $q+1$ nombres $jr\alpha - \mathrm{E}\, jr\alpha$, où $j = 0, 1, 2, \ldots, q$ sont tous distincts (vu que α est irrationnel) et tous $\geqslant 0$ et < 1. Il existe donc deux entiers distincts j_1 et j_2 de la suite $0, 1, \ldots, q$, tels que

(8) $$0 > j_1 r\alpha - \mathrm{E} j_1 r\alpha - (j_2 r\alpha - \mathrm{E} j_2 r\alpha) < \frac{1}{q}.$$

Distinguons deux cas.

1) $j_1 > j_2$. Posons $s = (j_1 - j_2)\, r$, $t = \mathrm{E} j_1 r\alpha - \mathrm{E} j_2 r\alpha$: s sera donc naturel, t — entier $\geqslant 0$ et (8) donne

(9) $$0 < s\alpha - t < \frac{1}{q}$$

et il existe un nombre naturel m qui est le plus petit tel que

$$m(s\alpha - t) > a.$$

On a donc

$$(m-1)(s\alpha - t) \leqslant a,$$

donc, d'après (9) et (7):

$$m(s\alpha - t) \leqslant a + (s\alpha - t) < a + \frac{1}{q} < b$$

On a ainsi

$$a < m(s\alpha - t) < b$$

et, en posant $n = ms$, $k = mt$, on obtient les inégalités (6). où n est un nombre naturel et k un entier $\geqslant 0$.

2) $j_1 < j_2$. Posons $s = (j_2 - j_1)\, r$, $t = \mathrm{E} j_2 r\alpha - \mathrm{E} j_1 r\alpha$; s sera donc naturel $\geqslant r$, t entier $\geqslant 0$, et (8) donne

(10) $$-\frac{1}{q} < s\alpha - t < 0,$$

et, vu que $b - \mathrm{E}b - 1 < 0$, il existe un nombre naturel m qui est le plus petit tel que

$$m(s\alpha - t) < b - \mathrm{E}b - 1.$$

On a donc

$$(m-1)(s\alpha - t) \geqslant b - Eb - 1,$$

d'où d'après (10) et (7):

$$m(s\alpha - t) \geqslant b - Eb - 1 + (s\alpha - t) > b - Eb - 1 - \frac{1}{q} > a - Eb - 1.$$

On a donc

$$a - Eb - 1 < m(s\alpha - t) > b - Eb - 1,$$

d'où

$$a \leqslant m(s\alpha - t) + Eb + 1 < b,$$

et, en posant $n = ms$, $k = mt - Eb - 1$, on trouve les inégalités (6), où n est naturel et k entier.

Or, on a $n = ms \geqslant s \geqslant r > \frac{b}{\alpha}$ d'où $n\alpha > b$ et comme d'après (6), $k > n\alpha - b$, on trouve $k > 0$. Le lemme se trouve ainsi démontré.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e 2. Soit m un nombre naturel donné > 1. Le nombre Lg 2 (où Lg désigne le logarithme à base 10) étant irrationel, il existe, d'après notre lemme, un nombre naturel n et un entier $k \geqslant 0$ tels que

$$Lg\, m < n\, Lg\, 2 - k < Lg(m+1),$$

d'où

$$Lg\, m + k < n\, Lg\, 2 < Lg(m+1) + k$$

et

$$m \cdot 10^k < 2^n < m\, 10^k + 10^k, \text{ c. à. d. } 2^n \leqslant m \cdot 10^k + 10^k - 1.$$

Donc, si $m = (c_1 c_2 \ldots c_s)_{10}$ est la représentation décimale du nombre m, on a

$$(c_1 c_2 \ldots c_s \overset{1}{0}\overset{2}{0} \ldots \overset{k}{0})_{10} < 2^n < (c_1 c_2 \ldots c_s \overset{1}{9}\overset{2}{9} \ldots \overset{k}{9})_{10}$$

ce qui prouve que les s premiers chiffres du développement décimal du nombre 2^n sont respectivement les mêmes que les s chiffres du nombre m.

Le théorème 2 est ainsi démontré.

SUR LA PÉRIODICITÉ MOD *m* DE CERTAINES SUITES INFINIES D'ENTIERS

Par

W. SIERPIŃSKI (Warszawa)[1]

Comme on sait, les restes modulo m de termes successifs de certaines suites infinies d'entiers

(1) $$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

forment des suites infinies periodiques, par exemple pour

$$u_n = n^2, 2^n, n^n, \frac{n(n+1)}{2}$$

Le but de cette Note est d'étudier la base commune de ces faits. Cette étude m'a été proposée par M. Zarankiewicz.

Désignons par $\{u_n\}$ la suite infinie (1). m étant un nombre naturel, nous désignerons par F_m la famille de toutes les suites infinies (1) aux termes entiers qui satisfont à la condition suivante: les restes modulo m des nombres $u_1, u_2, \ldots$ forment une suite périodique. En d'autres termes la formule $\{u_n\} \epsilon F_m$ équivaut à l'assertion qu'il existe deux nombres naturels k et h, tels que

$$u_{n+k} \equiv u_n \pmod{m} \quad \text{pour } n \geqslant h.$$

Posons encore $F = F_1 F_2 F_3 \ldots$.

Théorème 1. *Si l'on a pour un m naturel* $\{u_n\} \epsilon F_m$ *et* $\{v_n\} \epsilon F_m$, *on a aussi* $\{u_n + v_n\} \epsilon F_m$ *et* $\{u_n v_n\} \epsilon F_m$.

Démonstration. Si $\{u_n\} \epsilon F_m$ *et* $\{v_n\} \epsilon F_m$, il existe des nombres naturels k_1, k_2, h_1 et h_2 tels que

---

[1]) Communication présentée à la Société Polonaise de Mathématique, Section de Varsovie, le 9 juin 1950.

$u_{n+k_1} \equiv u_n$ (mod m *pour* $n \geqslant h_1$, *et* $v_{n+k_2} \equiv v_n$ (mod m) *pour* $n \geqslant h_2$ ce qui donne tout de suite

$u_{n+k_1 k_2} \equiv u_n$ (mod m) *pour* $n \geqslant h_1$, *et* $v_{n+k_1 k_2} \equiv v_n$ (mod m) *pour* $n \geqslant h_2$ d'où

$$u_{n+k_1 k_2} + v_{n+k_1' k_2} \equiv u_n + v_n \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant h_1 + h_2$$

et

$$u_{n+k_1 k_2} v_{n+k_1 k_2} \equiv u_n + v_n \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant h_1 + h_2,$$

ce qui prouve que $\{u_n + v_n\} \epsilon F_m$ *et* $\{u_n v_n\} \epsilon F_m$, *c. q. f. d.*

Corollaire . *Si* $\{u_n\} \epsilon F$ *et* $\{v_n\} \epsilon F$, *on a* $\{u_n + v_n\} \epsilon F$ *et* $\{u_n v_n\} \epsilon F$.

Corollaire 2. *Si* $\{u_n\} \epsilon F$ *et* a *est une constante entière on a* $\{a u_n\} \epsilon F$.

Corollaire 3. *Si* $\{u_n\} \epsilon F$, *on a* $\{u_n^k\} \epsilon F$ *pour* $k = 1, 2, 3 \ldots$

Corollaire 4. *Si* $f(x)$ *est un polynôme en* x *aux coefficients entiers,, et si* $\{u_n\} \epsilon F$, *on a* $\{f(u_n)\} \epsilon F$.

Les démonstrations de ces corollaires n'offrent pas de difficulté.

Théorème 2. *a étant un entier, on a* $\{a^n\} \epsilon F$.

Démonstration. Soit m un nombre naturel donné. Désignons, pour $n = 1, 2, \ldots$, par r_n le reste du nombre a^n modulo m. Les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{m+1}$ appartiennent tous à la suite $0, 1, 2, \ldots, m-1$: ils ne peuvent pas donc être tous distincts. Il existe donc des nombres h et $l > h$ de la suite $1, 2, \ldots, m+1$, tels que $r_l = r_h$. Comme $l > h$, nous pouvons poser $l = h + k$, où k est un nombre naturel ($\leqslant m$). On a donc $r_{h+k} = r_h$, c'est-à-dire $a^{h+k} \equiv a^h$ (mod m), d'où il résulte tout de suite que $a^{n+k} \equiv a^n$ (mod m) pour $n \geqslant h$, ce qui prouve que $\{a^n\} \epsilon F_m$. Ceci étant vrai pour $m = 1, 2, \ldots$, on trouve $\{a^n\} \epsilon F$, c. q. f. d.

Corollaire 5. *Si* a *et* r *sont des entiers et* s *est un nombre naturel, on a* $\left\{ \mathrm{E} \dfrac{a^n r}{s} \right\} \epsilon F$.

Démonstration. Soit m un nombre naturel donné. D'après le théorème 2 et le corollaire 2 on a $\{a^n r\} \epsilon F_{ms}$ et il existe des nombres naturels k et h tels que $a^{n+k} r \equiv a^n r \pmod{m s}$ pour $n \geqslant h$. Il existe donc pour tout $n \geqslant h$ un entier t_n tel que $a^{n+k} r = a^n r + mst_n$, d'où $\mathrm{E}\frac{a^{n+k} r}{s} = \mathrm{E}\frac{a^n r}{s} + mt_n$ pour $n \geqslant h$, d'où $\left\{\mathrm{E}\frac{a^n r}{s}\right\} \epsilon F_m$, c. q. f. d.

En particulier, pour $a = m$, il en résulte tout de suite la périodicité des développements des nombres rationnels en fraction infinie à base m [le n-ième chiffre du développement de $\frac{r}{s}$ étant, comme on sait, $\mathrm{E}\frac{m^n r}{s} - m\,\mathrm{E}\frac{m^{n-1} r}{s} \equiv \mathrm{E}\frac{m^n r}{s} \pmod{m}$].

Or, il est à remarquer que, pour les suites $\{v_n\}$ aux termes $\geqslant 0$, la formule $\{v_n\} \epsilon F$ n'entraîne pas en général la formule $\{2^{v_n}\} \epsilon F$. Posons, en effet,

$$v_n = n!\,(\mathrm{E}\sqrt{n} - \mathrm{E}\sqrt{n-1}).$$

m étant un nombre naturel donné, on a évidemment $m \mid v_n$ pour $n \geqslant m$, d'où $\{v_n\} \epsilon F_m$. On a ainsi $\{v_n\} \epsilon F$. Or, comme on voit sans peine, on a

$$2^{v_n} \equiv 1 + \mathrm{E}\sqrt{n} - \mathrm{E}\sqrt{n-1} \pmod{2} \text{ pour } n = 1, 2, \ldots,$$

c'est-à-dire $2^{v_n} \equiv 0 \pmod{2}$ pour tous les nombres n carrés et $2^{v_n} \equiv 1 \pmod{2}$ pour tous les autres n naturels, de sorte que la suite infinie de restes mod 2 de nombres $2^{v_1}, 2^{v_2}, \ldots$ n'est pas périodique. Il n'est pas donc $\{2^{v_n}\} \epsilon F_2$, et, à plus forte raison il n'est pas $\{2^{v_n}\} \epsilon F$.

On a cependant le

Théorème 3. *Si l'on a pour un m naturel $\{u_n\} \epsilon F_m$ et si $\{v_n\}$ est une suite telle que $v_n \geqslant 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n=\infty} v_n = +\infty$ et $\{v_n\} \epsilon F$, on a $\{u_n^{v_n}\} \epsilon F_m$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit m un nombre naturel donné. D'après le théorème 2 il existe pour tout nombre j de la suite 0, 1, 2,..., $m-1$ des nombres naturels k_j et h_j tels que

(2) $$j^{n+k_j} \equiv j^n \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant h_j$$

Posons $k = k_0 k_1 k_2 \ldots k_{m-1}$ et $h = h_0 + h_1 + \ldots + h_{m-1}$: il résulte tout de suite de (2) qu'on aura

(3) $$x^{n+k} \equiv x^n \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant h$$

quel que soit le nombre entier x.

Soit $\{v_n\}$ une suite telle que $v_n \geqslant 0$, $\lim\limits_{n=\infty} v_n = +\infty$ et $\{v_n\} \epsilon F$. Il existe donc des nombres naturels s et l, tels que

(4) $$v_n \geqslant h \text{ et } v_{n+s} \equiv v_n \pmod{k}, \text{ pour } n \geqslant l$$

Soit n un indice $\geqslant l$. On a donc $v_n \geqslant h$. Si $v_{n+s} \geqslant v_n$, on a, d'après (4), $v_{n+s} = v_n + kt$, où t est un entier $\geqslant 0$ et d'après (3) on trouve

$$x^{v_{n+s}} = x^{v_n + kt} \equiv x^{v_n} \pmod{m}$$

quel que soit l'entier x.
Si $v_{n+s} < v_n$, on a, d'après (4): $v_n - v_{n+s} = kt$, où t est un entier $\geqslant 0$ et, d'après (3) on trouve

$$x^{v_n} = x^{v_{n+s} + kt} \equiv x^{v_{n+s}} \pmod{m}$$

quel que soit l'entier x. On a donc toujours

(5) $$x^{v_{n+s}} \equiv x^{v_n} \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant l$$

quel que soit l'entier x.

Soit maintenant $\{u_n\}$ une suite telle que $\{u_n\} \epsilon F_m$: il existe donc des nombres naturels q et r tels que

$$u_{n+q} \equiv u_n \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant r,$$

d'où

(6) $$u_{n+qs}^{v_n} \equiv u_n^{v_n} \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant r$$

Or, d'après (5) (pour $x = u_{n+qs}$) on a

(7) $$u_{n+qs}^{v_{n+qs}} \equiv u_{n+qs}^{v_n} \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant l.$$

D'après (6) et (7) on a donc

$$u_{n+qs}^{\nu_{n+qs}} \equiv u_n^{\nu_n} \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant l+r,$$

ce qui prouve que $\{u_n^{\nu_n}\} \epsilon F_m$, c. q. f. d.

Il résulte tout de suite du théorème 3 le

Corollaire 6. *Si l'on a pour un m naturel* $\{u_n\} \epsilon F_m$, *on a aussi* $\{u_n^n\} \epsilon F_m$.

On en déduit tout de suite que $\{n^n\} \epsilon F$, ensuite que $\left\{n^{n^n}\right\} \epsilon F$ etc.

Théorème 4. *Si* $\{u_n\} \epsilon F$ *et si d est un diviseur naturel commun de tous les termes de la suite* $\{u_n\}$, *alors* $\left\{\frac{u_n}{d}\right\} \epsilon F$.

Démonstration. Soit $\{u_n\}$ une suite infinie telle que $\{u_n\} \epsilon F$ et soit d un diviseur naturel commun de tous les termes de la suite $\{u_n\}$. On a donc $u_n = d\,v_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, où $v_n (n = 1, 2, \ldots)$ sont des entiers.

Soit m un nombre naturel donné. Comme $\{u_n\} \epsilon F$, on a $\{u_n\} \epsilon F_{dm}$ et il existe des nombres naturels k et h, tels que

$$u_{n+k} \equiv u_n \pmod{dm} \text{ pour } n \geqslant h,$$

donc, vu que $u_n = d\,v_n$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$

$$d\,v_{n+k} \equiv d\,v_n \pmod{d\,m} \text{ pour } n \geqslant h,$$

ce qui donne

$$v_{n+k} \equiv v_n \pmod{m} \text{ pour } n \geqslant h,$$

ce qui prouve que $\{v_n\} \epsilon F_m$. Ceci étant vrai pour tout m naturel, on trouve $\{v_n\} \epsilon F$, donc $\left\{\frac{u_n}{d}\right\} \epsilon F$, c. q. f. d.

Il est à remarquer que si, pour un m naturel donné, on a $\{u_n\} \epsilon F_m$ et si $d \mid u_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, la formule $\left\{\frac{u_n}{d}\right\} \epsilon F_m$ peut n'être pas vraie. Par exemple, pour $m = 2$, $u_n = 2\mathrm{E}\sqrt{n}$ $d = 2$. on a $u \equiv 0 \pmod{2}$ pour $n = 1, 2, \ldots$, donc $\{u_n\} \epsilon F_2$,

et on n'a pas $\left\{\frac{u_n}{d}\right\} \epsilon F_2$, les restes modulo 2 de termes de la suite $\{E\sqrt{n}\}$ ne donnant pas une suite périodique.

Voici une application du théorème 4. D'après le corollaire 4 on a $\{n(n+1)\} \epsilon F$. Or, comme on sait, on a $2 \mid n(n+1)$ pour $n=1, 2, \ldots$ (vu qu'un des facteurs n et $n+1$ est toujours pair). D'après le théorème 4 on a donc $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} \epsilon F$, c'est-à-dire:

Quel que soit le nombre naturel m, les restes modulo m de nombres triangulaires succesifs forment une suite périodiqne.

En particulier, pour $m=10$, la période a 20 termes, pour $m = 100$ elle a 200 termes.

Pareillement on trouve que $\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} \epsilon F$ et que $\left\{\frac{n^5-5n^3+4n}{120}\right\} \epsilon F$.

Théorème 5. *Si l'on a, pour un nombre naturel m* $\{u_n\} \epsilon F_m$, *on a* $\{u_1+u_2+\ldots+u_n\} \epsilon F_m$.

Démonstration. Soit m un nombre naturel donné et soit $\{u_n\}$ une suite telle que $\{u_n\} \epsilon F_m$. Posons $v_n = u_1+u_2+\ldots+u_n$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$.

Il résulte de $\{u_n\} \epsilon F_m$ qu'il existe des nombres naturels k et h, tels que

$$u_{n+k} \equiv u_n \pmod m \text{ pour } n \geqslant h,$$

et on en déduit tout de suite qu'on a pour i et j entiers $\geqslant 0$:

$$u_{n+ik+j} \equiv u_{n+j} \pmod m \text{ pour } n \geqslant h,$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{m-1} u_{n+ik+j} \equiv m\,u_{n+j} \equiv 0 \pmod m \text{ pour } n \geqslant h,$$

et

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{m-1} u_{n+ik+j} \equiv 0 \pmod m \text{ pour } n \geqslant h,$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+mk}\equiv 0 \pmod{m} \text{ pour } n\geqslant h,$$

d'où

$$u_1+u_2+\ldots+u_{n+mk}\equiv u_1+u_2+\ldots+u_n \pmod{m} \text{ pour } n\geqslant h,$$

c'est-à-dire

$$v_{n+mk}\equiv v_n \pmod{m} \text{ pour } n\geqslant h,$$

ce qui proure que $\{v_n\}\epsilon F_m$, c. q. f. d.

En particulier, pour $u_n=n\,(n=1, 2,\ldots)$, on retrouve la formule $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}\epsilon F$.

SUR CERTAINES FONCTIONS HARMONIQUES JOUISSANT DES PROPRIÉTÉS EXTREMALES PAR RAPPORT À UN ENSEMBLE

Par

J. GÓRSKI (Kraków)

1. Objet du travail. Soit E un ensemble borné et fermé de points du plan, $f(z)$ une fonction réelle, définie et continue dans E, $p(z)$ une fonction complexe, définie et continue dans un domaine D contenant l'ensemble E. Nous supposerons que $p(z)$ soit différent de zéro dans D.

Soit $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ un système de $n+1$ points différents quelconques de E; je désignerai ce système plus brièvement par une seule lettre ξ

(1) $$\xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$$

Désignons par $\Phi_n^{(j)}(z; \xi, p, f, E)$ ou plus brièvement par $\Phi_n^{(j)}(z; \xi, p)$ le produit

(2) $$\Phi_n^{(j)}(z; \xi, p) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{z - \xi_k}{\xi_j - \xi_k} \left[\frac{p(\xi_j)}{p(z)}\right]^n \cdot e^{nf(\xi_j)}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

C'est une fonction de z définie dans domaine D.

Faisons maintenant varier les points du système (1) dans E et désignons par $\Phi_n(z; p, f)$ ou plus brièvement par $\Phi_n(z; p)$ la borne inférieure du plus grand des $n+1$ modules $|\Phi_n^{(j)}(z; \xi, p)|$, $j = 0, 1, \ldots, n$, lorsque, z étant fixe, les points (1) parcourent E

(3) $$\Phi_n(z; p) = \inf_{\xi \in E} \{\max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(z; \xi, p)|\}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

La borne $\Phi_n(z; p)$ est positive en chaque point $z \in D$

En effet, soit m la borne inférieure du produit $|p(z)|e^{f(z)}$ lorsque z parcourt E. Vu que $p(z)$ est différent de zéro sur E on a $m > 0$ donc

$$|\Phi_n^{(j)}(z;\xi,p)| \geqslant \frac{m^n}{|p(z)|^n} \prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n} \left|\frac{z-\xi_k}{\xi-\xi_k}\right|$$

et comme

$$\max_{(j)} \prod_{\substack{k=0\\(k\neq j)}}^{n} \left|\frac{z-\xi_k}{\xi_j-\xi_k}\right| \geqslant \frac{1}{n+1}$$

on a

$$\Phi_n(z;p) = \inf_{\xi\in E}\{\max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(z;\xi,p)|\} \geqslant \frac{m^n}{|p(z)|^n} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Désignons par $d(E)$ le diamètre transfini de E introduit par M. Fekete[1]) et observons que l'ensemble complémentaire de E par rapport au plan fermé est une somme finie ou dénombrable de domaines disjoints. Désignons par D_∞ celui de ces domaines qui contient le point à l'infini et par F sa frontière. On sait que $d(E) = d(F)$.

Considérons le cas particulier où, c étant une constante différente de zéro, on a

$$f(z) \equiv 0 \text{ dans } E \text{ et } p(z) \equiv c \text{ dans } D.$$

M. F. Leja[2]) a démontré que la suite $\{\sqrt[n]{\Phi_n(z;c)}\}$ tend dans le plan entier vers une fonction limite $\Phi(z)$ jouissant des propriétés suivantes:

1° *Si* $d(E) > 0$, $\Phi(z)$ *est partout finie* $\geqslant 1$ *dans* D *et* $\Phi(z) = 1$ *dans* E.

2° *Si* $d(E) = 0$, $\Phi(z)$ *est infinie en dehors de* E *et* $\Phi(z) = 1$ *dans* E.

3° *Lorsque* F *est une somme de continus,* $\log \Phi(z)$ *est la fonction de Green classique du domaine* D_∞ *avec le pôle* $z = \infty$.

---

1) M. Fekete, Math. Z., t. 17 (1922), p. 228—249.

2) F. Leja, Ann. de la Soc. Polon. de Math., t. 12. (1934), p. 56—71.

Le but de ce travail est d'examiner la suite (3) dans le cas général où $f(z)$ et $p(z)$ sont des fonctions quelconques remplissant les conditions spécifiées plus haut.

2. Existence d'une fonction limite. Considérons la suite (3).

Théorème 1. *La suite* $\{\sqrt[n]{\Phi_n(z;p)}\}$ *tend dans le domaine* D *vers une limite*

(4) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Phi_n(z;p)} = \Phi(z;p).$$

La démonstration sera appuyée sur lemme suivant:

Lemme 1. *Les termes de la suite* (3) *satisfont quel que soit* $z \in D$ *aux inégalités suivantes*

(5) $$\Phi_{\mu+\nu}(z;p) \geqslant \Phi_\mu(z;p)\cdot\Phi_\nu(z;p) \quad \text{pour } \mu \text{ et } \nu = 1, 2, \ldots .$$

Démonstration du lemme. Soit z un point fixe de D. Il est évident qu'à chaque $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre dans E un système de $\mu+\nu+1$ points $\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{\mu+\nu}\} = \eta$ tels qu'on ait

$$\Phi_{\mu+\nu}(z;p) \geqslant \max_{(j)} |\Phi^{(j)}_{\mu+\nu}(z;\eta,p)| - \varepsilon .$$

Introduisons les notations suivantes: $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\} = \xi$ étant des points quelconque du plan, posons

(6) $$V(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n} |\xi_j - \xi_k| ,$$

(7) $$\Delta(\xi_j; \xi) = \prod_{\substack{k=0 \\ (k \neq j)}}^{n} |\xi - \xi_k| \quad \text{pour } j = 0, \ldots, n$$

et observons que, quel que soit $j = 0, 1, \ldots n$, on a relation

$$V(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \Delta(\xi_j; \xi)\cdot V(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_n) .$$

Ceci posé, soit z le point fixé plus haut et $\eta_{j_1}, \eta_{j_2}, \ldots, \eta_{j_\nu}$ un système de ν points quelconque du système η. L'expression

$$W(z;\eta_{j_1},\ldots,\eta_{j_\nu})=\frac{|p(z)|^n\cdot V(z;\eta_{j_1},\ldots\eta_{j_\nu})}{|p(\eta_{j_1})\ldots\ldots\ldots p(\eta_{j_\nu})|^n}\,e^{-n\sum\limits_{s=0}^{\nu} f(\eta_{j_s})}$$

possède un maximum lorsque, z étant fixe, les points $\eta_{j_1},\ldots,\eta_{j_\nu}$ parcourent le système η. En changeant convenablement des indices des points de ce systéme on peut supposer que ce maximum soit égal à $W(z;\eta_{\mu+1},\ldots,\eta_{\mu+\nu})$.

La suite de démonstration est complètement analogue à la démonstration du lemme qui se trouve dans le travail de M. F. Leja inséré dans le Bull. de l'Acad. Polon. des Sc., Cracovie 1936, p. 79—92.

Le théorème 1 résulte immédiatement du lemme 1 et du lemme connu suivant:

Si une suite $\{a_n\}$ à termes positifs remplit la condition $a_{\mu+\nu}\geqslant a_\mu\cdot a_\nu$ pour μ et $\nu=1,2,\ldots$, la suite $\sqrt[n]{a_n}$ tend vers une limite finie ou infinie.

3. Construction des certaines fonctions extrémales. Considérons la fonction

$$U(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)=\frac{V(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)}{|p(\xi_0)\ldots\ldots p(\xi_n)|^n}\,e^{-n\sum\limits_{i=0}^{n} f(\xi_i)}$$

où $V(\xi_0,\ldots,\xi_n)$ est définie par la formule (6) et cherchons son maximum, lorsque n étant fixe, les points $\xi_0,\ldots,\xi_n$ varient dans E. Appelons *n-ième système extremal de l'ensemble E* par rapport aux fonctions $f(z)$ et $p(z)$ un système de points de E, soit

(9) $$\xi=\{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n\},$$

pour lequel

(10) $$U(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n)=\max_{\xi\in E} U(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n).$$

Supposons encore que les indices des points $\xi_0,\xi_1,\ldots\xi_n$ soient choisis de manière à avoir

(11) $$\frac{\Delta(\xi_0;\xi)}{|p(\xi_0)|^n\cdot e^{nf(\xi_0)}}\leqslant\frac{\Delta(\xi_j;\xi)}{|p(\xi_j)|^n\cdot e^{nf(\xi_j)}}\qquad\text{pour } j=0,1,\ldots,n$$

et formons les fonctions

(12) $\Phi_n^{(j)}(z;\xi,p) \quad , \quad j=0,1,\ldots,n\,.$

Lemme 2. *En chaque point $z\in E$ les fonctions* (12) *satisfont quel que soit n aux inégalités*

(13) $|\Phi_n^{(j)}(z;\xi,p)|\leqslant e^{nf(z)}\ , \ j=0,1,\ldots,n\,.$

Démonstration. Si l'inégalité (13) n'était pas satisfaite dans E pour une valeur de l'indice j il existerait dans E un point $z=\xi'_j$ tel que

$$|\Phi_n^{(j)}(\xi'_j;\xi,p)|>e^{nf(\xi'_j)}$$

donc

$$\varDelta(\xi'_j;\xi)\cdot|p(\xi_j)|^n_\cdot\, e^{nf(\xi_j)}>\varDelta(\xi_j;\xi)\cdot|p(\xi'_j)|^n_\cdot\, e^{nf(\xi'_j)}$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par

$$\prod_{\substack{=0\\ \neq}}^{n}|p(\xi_k)|\,e^{nf(\xi_k)}$$

on en déduirait l'inégalité

$$U(\xi_0,\ldots,\xi_{j-1},\xi'_j,\xi_{j+1},\ldots,\xi_n)>U(\xi_0,\ldots,\xi_n)$$

incompatible avec l'hypothése (10), donc les inégalités (13) ont bien lieu.

Supposons maintenant que $p(z)$ soit une fonction analytique régulière ne s'annulant pas dans D.

Théorème 2. *Si $d(E)>0$, alors 1° il existe dans l'ensemble ouvert $D-E$ la limite*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)|}$$

et cette limite est égale à la fonction $\Phi(z;p)$ définie par (4)

(14) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)|}=\Phi(z;p)\,,$

2° la convergence est uniforme dans le voisinage de chaque point $z\in D-E$ et la fonction $\log\Phi(z;p)$ *est harmonique dans $D-E$.*

D é m o n s t r a t i o n. 1°. Soit z un point fixe quelconque de $D-E$, $r=r(z,E)$ la borne inférieure des distances $|z-a|$ lorsque a parcourt E et $R=R(z,E)$ la borne supérieure des ces distances. Je vais prouver les inégalités

$$(15) \quad \frac{r}{R}\Phi_n(z;p)\leqslant|\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)|\leqslant(n+1)\cdot\Phi_n(z;p)\,, \quad n=1,2,\ldots$$

En effet, à chaque $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un système de points $\{\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_n\}=\eta$ tel, qu'on ait

$$(16) \qquad \Phi_n(z;p)\geqslant\max_{(j)}|\Phi_n^{(j)}(z;\eta,p)|-\varepsilon\,.$$

Désignons par $L_n^{(j)}(z;\eta)$ le polynome

$$(17) \qquad L_n^{(j)}(z;\eta)=\prod_{\substack{k=0\\(k\neq}}^{n}\frac{z-\eta_k}{\eta_j-\eta_k} \qquad j=0,1,\ldots,n$$

et observons que le produit $(p(z))^n\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)$ est un polynome du degré n. D'après la formule d'interpolation de Lagrange on a identiquement

$$(p(z))^n\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)\equiv\sum_{j=0}^{n}(p(\eta_j))^n\Phi_n^{(0)}(\eta_j;\xi,p)\cdot L_n^{(j)}(z;\eta)$$

donc

$$\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)=\sum_{j=0}^{n}\Phi_n^{(0)}(\eta_j;\xi,p)\cdot L_n^{(j)}(z;\eta)\cdot\left(\frac{p(\eta_j)}{p(z)}\right)^n$$

et par suite d'après (13)

$$|\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)|\leqslant\sum_{j=0}^{n}\left|L_n^{(j)}(z;\eta)\right|\cdot\left|\frac{p(\eta_j)}{p(z)}\right|^n\cdot e^{nf(\eta_j)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}|\Phi_n^{(j)}(z;\eta,p)|\leqslant(n+1)\cdot\max_{(j)}|\Phi_n^{(j)}(z;\eta,p)|\,.$$

En tenant compte de (16) on aura

$$|\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)|\leqslant(n+1)\cdot[\Phi_n(z;p)+\epsilon]$$

donc la seconde des inégalités (15) est vraie car ϵ est arbitrairement petit.

Considérons le n-ième système extremal $\xi=\{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ de E et soit s celui des indices $j=0,1,\ldots,n$ pour lequel

$$\Phi_n(z;p) \leqslant \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(z;\xi,p)| = |\Phi_n^{(s)}(z;\xi,p)|.$$

On a identiquement

$$|\Phi_n^{(s)}(z;\xi,p)| = |\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)| \cdot \left|\frac{z-\xi_0}{z-\xi_s}\right| \cdot \frac{v_0}{v_s}$$

où v_j désigne le seconde membre de l'inégalité (11). Etant $v_s \geqslant v_0$ on a

$$\Phi_n(z;p) \leqslant \left| \Phi_n^{(0)}(z;\xi,p) \right| \cdot \left| \frac{z-\xi_0}{z-\xi_s} \right| \leqslant \left| \Phi_n^{(0)}(z;\xi,p) \right| \frac{R}{r}$$

donc la prémière des inégalités (15) est vraie.

La formule (14) résulte immédiatement de la formule (4) et des inégalités (15)

2°. Soit G un domaine borné et fermé quelconque contenu dans le domaine $D-E$ et z un point fixe de G. Désignons par Δ_n la borne supérieure du plus petit des produits (7) lorsque le système $\xi = \{\xi_1, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ varie dans E.

$$\Delta_n = \sup_{\xi \varepsilon E} \left\{ \min_j \Delta(\xi_j;\xi) \right\}.$$

On sait[3]) que $\sqrt[n]{\Delta_n}$ tend vers le diamètre transfini $d(E)$.

Soit R le diamètre de $E+G$ et r la distance de E à G; il est clair que $r>0$. Désignons encore par A et B les bornes.

$$A = \inf_{z \varepsilon E} \left\{ |p(z)|\, e^{f(z)} \right\}, \quad B = \sup_{z \varepsilon E} \left\{ |p(z)|\, e^{f(z)} \right\}.$$

Puisque E est compact et $p(z) \neq 0$ dans E on a $B \geqslant A > 0$. Je dis que

$$(18) \qquad \frac{r}{\sqrt[n]{\Delta_n}} \cdot \frac{A}{|p(z)|} \leqslant \sqrt[n]{\Phi_n(z;p)} \leqslant \frac{B}{|p(z)|} \cdot \frac{R}{\sqrt[n]{\Delta_n}}.$$

En effet, il existe dans E un système de $n+1$ points, soit $\{y_0 y_1, \ldots, y_n\} = y$, pour lequel $\Delta_n = \min_j \Delta(y_j;y.)$ D'après (2) et (3) on a

---

[3]) F. Leja, Bul. l'Acad. des Sc., Cracovie 1933, p. 281-289.

$$\Phi_n(z;p) \leqslant \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(z;y,p)| \leqslant \frac{R^n}{\Delta_n} \cdot \frac{B^n}{|p(z)|^n}$$

ce qui entraîne la seconde des inégalités (18).

D'autre part, soit $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un système de $n+1$ points de E pour lequel

$$\Phi_n(z;p) = \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(z;x,p)|.$$

Étant $\Delta_n \geqslant \min_{(j)} \Delta(x_j;x)$, on a

$$\Phi_n(z;p) \geqslant |\Phi_n^{(j)}(z;x,p)| \geqslant \frac{r^n}{\Delta_n} \cdot \frac{A^n}{|p(z)|^n}$$

ce qui entraîne la première des inégalités (18).

De (15) et (18) on déduit pour chaque $z \in G$ l'inégalité

$$(19) \quad \sqrt[n]{\frac{r}{R}} \cdot \frac{r}{\sqrt[n]{\Delta_n}} \cdot \frac{A}{|p(z)|} \leqslant \sqrt[n]{|\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)|} \leqslant \sqrt[n]{n+1} \cdot \frac{R}{\sqrt[n]{\Delta_n}} \cdot \frac{B}{|p(z)|}$$

Puisque $\sqrt[n]{\Delta_n} \to d(E) > 0$ et que $|p(z)|$ est borné et plus grand d'un nombre positif dans G la suite

$$\left\{ \frac{1}{n} \log |\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)| \right\}$$

est uniformément bornée dans G. Les termes de cette suite sont harmoniques dans G, donc la convergence

$$\frac{1}{n} \log \left| \Phi_n^{(0)}(z;\xi,p) \right| \to \log \Phi(z;p)$$

est uniforme dans G et par suite la fonction limite est harmonique dans G.

4. Le comportement de la fonction $\Phi(z;p)$ dans l'ensemble E. Il est clair que la fonction $\Phi(z;p)$ dépend de la fonction $f(z)$. Supposons que la fonction $f(z)$ soit identiquement nulle dans E et que $p(z)$ soit définie dans le domaine D par a formule

$$p(z) = \sqrt[k]{z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k}$$

où $z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k$ est un polynome quelconque du dégré $k \geqslant 1$ dont les zéros sont extérieurs à D et la détermination du radical est quelconque. Le module $|p(z)|$ dont nous nous servirons dans la suite est bien déterminé. Je vais démontrer le

Théorème 3. *Si l'ensemble E est une somme de continus et z_0 est un point de E situé sur la frontière de E, la fonction $\Phi(z;p)$ tend vers 1 lorsque z, en restant dans le domaine $D-E$, tend vers z_0.*

$$\lim_{z\to z_0} \Phi(z;p) = 1. \tag{20}$$

Démostration. Soit ϱ un nombre positif quelconque. Le point z_0 est situé sur un continu $C\subset E$. Désignons par C_ϱ la partie de C contenue dans le cercle $|z-z_0|<\varrho$ et posons $R_\varrho=\max|p(z)|$. A chaque $\varepsilon'>0$ correspond un nombre $\varrho(\varepsilon')>0$ tel que

$$\frac{R_{\varrho(\varepsilon')}}{|p(z)|} < 1+\varepsilon' \quad \text{si} \quad |z-z_0| < \varrho(\varepsilon'). \tag{21}$$

Puisque $|p(z)| \leqslant R_{\varrho(\varepsilon')}$ dans le cercle $|z-z_0|<\varrho(\varepsilon')$ et que, d'après (17) où $f(z)\equiv 0$, on a $|\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)|\leqslant 1$ sur C donc

$$|p(z)|^n \cdot |\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)| \leqslant (R_{\varrho(\varepsilon')})^n \text{ pour } z\in C_{\varrho(\varepsilon')}. \tag{22}$$

Je m'appuyerai maintenant sur le lemme suivant du à M. F. Leja:[4])

Soit Γ un continu quelconque, z_0 un point de Γ et $\{W_n(z)\}$ une suite de polynomes remplissant sur Γ la condition $|W_n(z)|\leqslant M$ pour $n=1,2,\ldots$, où M est une constante et le degré de $W_n(z)$ est $\leqslant n$ pour $n=1,2,\ldots$ Alors à tout $\varepsilon>0$ correspondent deux nombres positifs $r=r(\varepsilon,\Gamma)$ et $N=N(\varepsilon,\Gamma)$ tels que

$$\sqrt[n]{|W_n(z)|} < 1+\varepsilon \text{ pour } |z-z_0| < r \text{ et } n > N.$$

Observons que l'expression $p(z)^n\cdot\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)/R^n_{\varrho(\varepsilon')}$ est un polynome du degré n borné d'après (22) par 1 sur $C_{\varrho(\varepsilon')}$ pour $n=1,2,\ldots$, donc d'après le lemme de M. F. Leja on a dans un voisinage $|z-z_0|<r$ de z_0 l'inégalité

$$|p(z)^n\cdot\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)| \leqslant R_{\varrho(\varepsilon')}\cdot(1+\varepsilon)^n \text{ pour } n>N$$

et par suite d'après (21)

$$\sqrt[n]{|\Phi_n^{(0)}(z;\xi,p)|} \leqslant (1+\varepsilon')(1+\varepsilon) \text{ pour } |z-z_0|<r \text{ et } n>N. \tag{23}$$

---

[4]) F. Leja, Math. Ann., t. 108, p. 517—524.

D'autre part, si z n'appartient pas à E et $\nu = 1, 2, \ldots$, il existe dans E un système de $k\nu+1$ points $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{k\nu}$ tels qu'on ait

$$(24) \qquad \Phi_{k\nu}(z;p) = \max_{(j)} \left| \Phi_{k\nu}^{(j)}(z;\eta, p) \right| = \\ = \frac{1}{|p(z)|^{k\nu}} \cdot \max_{(j)} \left| L_{k\nu}^{(j)}(z;\eta) \cdot p(\eta_j)^{k\nu} \right|.$$

En appliquant la formule d'interpolation de Lagrange au polynome $[p(z)]^{k\nu}$ on a

$$(p(z))^{k\nu} \equiv \sum_{j=0}^{k\nu} L_{k\nu}(z;\eta) \cdot p(\eta_j)^{k\nu}$$

donc

$$\max_{(j)} \left| L_{k\nu}^{(j)}(z;\eta) \cdot p(\eta_j)^{k\nu} \right| \geqslant \frac{|p(z)|}{k\nu+1}$$

et par suite d'après (24) $\Phi_{k\nu}(z;p) \geqslant 1/(k\nu+1)$ On en déduit l'inégalité

$$\Phi(z;p) = \lim_{\nu\to\infty} \sqrt[k\nu]{\Phi_{k\nu}(z;p)} \geqslant 1$$

qui entraîne (20) en vertu de (23).

5. Cas particuliers I. Supposons comme dans le numéro 4 que $f(z) \equiv 0$ et que $p(z)$ soit le polynome du degré 1 de la forme $p(z) = p_1(z) = z - \alpha$, où α est un point quelconque n'appartenant pas à E. D'après (12) et (14) on a

$$\Phi_n^{(j}\ z;\xi, p_1) = L_n^{(j)}(z;\xi) \cdot \frac{(\xi_j - \alpha)^n}{(z-\alpha)^n}$$

et

$$\Phi(z;p_1) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \Phi_n^{(0)}(z;\xi, p_1) \right|}.$$

Le point $z=\alpha$ est situé dans un des domaines dont la somme est l'ensemble complémentaire à E. Désignons ce domaine par D_α.

Théorème 4. *Lorsque le diamètre transfini $d(E)$ est positif, alors* $\log \Phi(z;p_1)$ *est la fonction de Green (classique ou généralisée) du domaine D_α avec le pôle $z=\alpha$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons d'abord que E soit une somme de continus. Il résulte immédiatement des théorèmes

2 et 3 que la fonction $\log \Phi(z; p_1)$ est harmonique et positive en dehors de $E + \{\alpha\}$ et qu'elle tend vers zéro lorsque, z n'appartenant pas à $E + \{\alpha\}$, tend vers un point quelconque de E.

Observons maintenant que d'après (19) la différence

$$\frac{1}{n} \cdot \log \mid \Phi_n^{(0)}(z; \tilde{\xi}, p_1) \mid - \log \frac{1}{|z-\alpha|}$$

est bornée dans le domaine $D_\alpha - \{\alpha\}$, donc sa limite pour $n \to \infty$, c'est-à-dire

$$\log \Phi(z; p_1) - \log \frac{1}{|z-\alpha|}, \tag{25}$$

y est bornée aussi. Par suite la différence (25) est harmonique aussi au point α ce qui prouve que $\log \Phi(z; p_1)$ est la fonction de Green classique de D_α.

Lorsque la frontière de D_α est quelconque, la démonstration est analogue à celle donnée dans le travail inséré dans ce journal t. XXI (1948), p. 70.

Remarque. Lorsque E est une somme de continus, la fonction $\log \Phi(z; p_1)$ est harmonique en dehors de $E + D_\alpha$ et tend vers zéro lorsque le point z n'appartenant pas $E + D_\alpha$ tend vers un point de E. Par suite d'après le principe de maximum, $\log \Phi(z; p_1)$ est identiquement égal à zéro en dehors de $E + D_\alpha$.

II. Supposons maintenant que $f(z) \equiv 0$ et que

$$p(z) = p_2(z) = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

où la détermination du radical est quelconque. Alors

$$\Phi_n^{(0)}(z; \xi, p_2) = L_n^{(0)}(z; \xi) \cdot \left[\frac{(\xi_0 - \alpha)(\xi_0 - \beta)}{(z - \alpha)(z - \beta)} \right]^{\frac{n}{2}}$$

Les points α et β sont situés dans l'ensemble complémentaire CE de E. Désignons par D_α le plus grand domaine contenant α et contenu dans CE et par D_β le domaine analogue. Il est clair que les domaines D_α et D_β peuvent être identiques ou disjoints.

Supposons que $D_\alpha \neq D_\beta$ et désignons par $G(z, D_\alpha)$, la fonction de Green du domaine D_α avec le pôle α et par $G(z, D_\beta)$ la fonction analogue.

Théorème 5. *Lorsque* $D_\alpha \neq D_\beta$ *alors*

$$2 \log \Phi(z; p_2) = \begin{cases} G(z, D_\alpha) \text{ dans } D_\alpha, \\ G(z, D_\beta) \text{ dans } D_\beta . \end{cases}$$

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que E soit une somme de continus. Il resulte des théorèmes 2 et 3 que la fonction $2 \log \Phi(z; p_2)$ est harmonique et positive en dehors de $D + \{\alpha\} + \{\beta\}$ et quelle tend vers zéro lorsque z tend vers un point $z_0 \epsilon E$. Il reste à prouver que la différence

$$2 \log \Phi(z; p_2) - \log \frac{1}{|z - \alpha|}$$

tend vers une limite finie lorsque $z \to \alpha$. Considérons à cet effet la suite partielle $\left\{ \sqrt[2\nu]{|\Phi_{2\nu}^{(0)}(z; \xi, p_2)|} \right\}$ et observons que d'après (19) la différence

$$\frac{1}{2\nu} \log |\Phi_{2\nu}^{(0)}(z; \xi, p_2)| - \frac{1}{2} \log \frac{1}{|z - \alpha|}$$

est bornée dans $D_\alpha - \{\alpha\}$, donc la limite

$$\log \Phi \quad z; p_2) - \frac{1}{2} \, log \, \frac{1}{|z - \alpha|} \tag{26}$$

est bornée dans le voisinage du point $z = \alpha$ et par suite la fonction (26) est bornée et harmonique au point $z = \alpha$.

Pareillement la fonction

$$\log \Phi(z; p_2) - \log \frac{1}{|z - \beta|}$$

est harmonique dans le domaine D_β.

Remarquons que dans le cas où $D_\alpha = D_\beta$ et $\alpha \neq \beta$ la onction $\log \Phi(z; p_2)$ est harmonique et positive dans $D - \{\alpha\} - \{\beta\}$ et tend vers zéro lorsque z tend vers la frontière de D_α. Les points α et β sont des pôles du degré $1/2$ de cette fonction. En dehors de l'ensemble $D_\alpha + D_\beta + E$ la fonction $2 \log \Phi(z; p_2)$ est identiquement nulle.

Le cas où $D_\alpha = D_\beta$ et $\alpha = \beta$ se reduit au cas I.

III. Considérons maintenant le cas général où

$$p(z) = p_k(z) = \sqrt{(z-\alpha_1\ (z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_k)}$$

et désignons par D_{α_i}, $i = 1, 2, \dots, k$, le plus grand domaine contenant α_i et contenu dans CE. Lorsque $D_{\alpha_i} \neq D_{\alpha_s}$, $i \neq s = = 1, 2, \dots, k$, on démontre comme plus haut l'égalité

$$k \cdot \text{lo}\ \Phi(z; p_k) = G(z; D_i) \text{ dans } D_{\alpha_i},\ i = 1, 2, \dots k\ ,$$

où $G(z, D_{\alpha_i})$ est la fonction de Green (classique ou généralisée) du domaine D_{α_i} avec le pôle α_i. En dehors de l'ensemble $\sum D_{\alpha_i} + E$ la fonction $k \cdot \log \Phi(z; p_k)$ est identiquement nulle.

Si $\alpha_i = \alpha \in D_\alpha$, $i = 1, 2, \dots, k$ nous retrouvons le cas I.

SUR LES TRANSFORMATIONS DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

par

Z. MIKOŁAJSKA (Kraków).

Le théorème qui suit constitue une réponse à une question posée par M. M. T. Ważewski et J. Szarski.

Théorème: Considérons la transformation T

$$(T) \qquad x_i = F_i(\tau, \xi_1, \ldots \xi_n), \; t = \tau \qquad (i = 1, \ldots n)$$

Admettons que les fonctions $F^i(\tau, \xi_1, \ldots \xi_n)$ et leurs dérivées partielles du premier ordre soient continues dans l'es pace de points $(\tau, \xi_1, \ldots \xi_n)$ et que le déterminant Dét. $(F^i_{\xi k}\,(0, \ldots 0))$ soit différent de zéro. Supposons que T admette la transformation inverse T^{-1}

$$(T^{-1}) \qquad \xi_i = f^i(t, x_s, \ldots x_n), \; \tau = t$$

valable dans l'espace tout entier. Admettons en plus que la transformation T^{-1} appliquée à un systéme *quelconque* d'équations différentielles linéaires et homogènes à *coefficients constants*

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x$$

conduise à un système linéaire du même genre.

Ceci étant supposé nous affirmons que la transformation T est de la forme

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} e^{\sigma\tau} \gamma_{ik}\, \xi_k, \quad t = \tau \qquad (i = 1, \ldots n)$$

Démonstration: Désignons par A la famille de tous les systèmes linéaires, homogènes à coefficients constants.

Nous dirons qu'une transformation T possède la propriété P lorsqu'elle transforme la famille A en une famille partielle de A.

Posons $F^i_{\xi_k}(0;\dots 0) = \gamma_{ik}$. La matrice $\|\gamma_{ik}\|$ n'étant pas singulière elle admet une matrice inverse $\|\beta_{ik}\|$. Envisageons la transformation linéaire L

$$(L) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} u_k\,, \qquad t = \tau \qquad (i=1,\dots n)$$

et la transformation composée $W = L.\,T$

$$(W) \qquad x_j = \sum_{s=1}^{n} \beta_{is} F^s(\tau, \xi_1, \dots \xi_n) \overset{df}{=} H^i(\tau, \xi_1, \dots \xi_n)\,, \; t = \tau$$

On vérifie facilement, que

$$(1) \qquad H^i_{\xi_k}(0,\dots,0) = \delta_{ik}$$

où $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ik} = 0$ pour $i \neq k$ $(i=1,\dots n, k=1,\dots,n)$.

Nous démontrerons dans la suite que les fonctions $H^i(\tau, \xi_1, \dots \xi_n)$ ainsi définies sont de la forme

$$(*) \qquad H^i(\tau, \xi_1, \dots \xi_n) = e^{\sigma\tau} \xi_i$$

Il en résultera notre théorème, puisque $T = L^{-1}.\,W$. Nous passons donc à la démonstration de la formule $(*)$.

La transformation $W^{-1} = T^{-1}.\,L^{-1}$ possède évidemment la propriété P. La transformation W^{-1} appliquée à un système quelconque

$$(R_1) \qquad x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i=1,\dots n)$$

de la classe A conduit à un système d'équations différentielles

$$(\overline{R}_1) \qquad \xi_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \xi_j \qquad (i=1,\dots n)$$

Une intégrale quelconque $\xi_i = \xi_i(t)$ de $(\overline{R}_1)$ passe par l'intermédiaire de W en une intégrale $x_i = x_i(t)$ de (R_1). On aura par suite l'égalité

(2) $$x_i' = H_t^i(t, \xi_1 \ldots \xi_n) + \sum_{k=1}^{n} H_{\xi_k}^i(t, \xi_1 \ldots \xi_n)\, \xi_k'$$

valable le long de cette intégrale. En remplaçant respectivement x_i' par $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ et ξ_i' par $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, \xi_j$ nous aurons

(3) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = H_t^i(t, \xi_1, \ldots {}_n) + \sum_{k=1}^{n} H_{\xi_k}^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n)\, A_{kl}\, \xi_l$$

En remplacant dans les dernières égalités x_j par $H^j(t, \xi_1, \ldots \xi_n)$ nous obtiendrons l'égalité

(4)
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} H^j(t, \xi_1, \ldots \xi_n) \equiv H_t^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n) + \sum_{k,\, l=1}^{n} H_{\xi_k}(t, \xi_j \ldots \xi_n)\, A_{kl}\, \xi$$

valable le long de toutes les entégrales de $(\overline{R}_1)$. Par chaque point de l'espace $(t, \xi_1, \ldots \xi_n)$ passe une intégrale de ce système et par suite les relations (4) sont valables dans *l'espace tout entier*. À chaque matrice $\| a_{ij} \|$ correspond donc une matrice constante $\| A_{ij} \|$ vérifiant partout l'identité (4). À une matrice quelconque b_{ij} correspondra d'une façon analogue une matrice B_{ij} telle que

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} H^j(t, \xi_1, \ldots \xi_n) \equiv H_t^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n) + \sum_{lk=1}^{n} H_{\xi_k}^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n)\, B_{kl}\, \xi_l$$

On aura donc

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})\, H^j(t, \xi_1, \ldots \xi_n) \equiv \sum_{k,l=1}^{n} H_{\xi_k}^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n)\; A_k - B_{kl})\, \xi$$

et par suite

(5) $$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} H^j(t, \xi_1, \ldots \xi_n) \equiv \sum_{k\, l=1}^{n} H_{\xi_k}^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n)\, C_{kl}\, \xi_l \quad (j=1, \ldots n)$$

où $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, $C_{kl} = A_{kl} - B_{kl}$ $\quad (k, l, i, j, = 1, \ldots n)$

A chaque matrice $\| c_{ij} \|$ correspond donc une matrice $\| C_{kl} \|$ satisfaisant aux identités (5).

Pour $c_{ij} = \delta_{ij}$ $(i\,j = 1, \dots n)$ nous aurons d'après (5)

$$H^i(t, \xi_1, \dots \xi_n) \equiv \sum_{kl=1}^{n} H^i_{\xi_k}(t, \xi_1, \dots \xi_n)\, C_{kl}\, \xi_l \tag{6}$$

et pour $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$ nous obtiendrons

$$H^i(t, 0, \dots 0) \equiv 0 \qquad (i = 1, \dots n) \tag{7}$$

Posons dans les relations (5) $t = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0, \xi_1 \neq 0$. Nous aurons

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} H^j(0, \xi_1, 0, \dots 0) \equiv \sum_{k-1}^{n} H^i_{\xi_k}(0, \xi_1, 0, \dots 0)\, C_{k1}\, \xi_1$$

et par suite d'après (7)

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \left\{ H^j(0, \xi_1 0, \dots 0) - H^j(0, \dots 0) \right\} \equiv \sum_{k=1}^{n} H^i_{\xi_k}(0, \xi_1, 0, \dots 0)\, C_{k1}\, \xi_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} H^j_{\xi_1}(0, \vartheta_{\xi_1} \xi_1, 0, \dots 0)\, \xi_1 \equiv \sum_{k-1}^{n} H^i_{\xi_k}(0, \xi_1, 0, \dots 0)\, C_{k1}\, \xi_1$$

où $0 < \vartheta_{\xi_1} < 1$.

Dans le cas où $\xi_1 \neq 0$ nous aurons

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} H^j_{\xi_1}(0, \vartheta_{\xi_1} \xi_1, 0, \dots 0) \equiv \sum_{k=1}^{n} H^i_{\xi_k}(0, \xi_1, 0, \dots 0)\, C_{k1} \tag{8}$$

Les fonctions $H^i_{\xi_1}(t, \xi_1, \dots \xi_n)$ étant continues nous obtiendrons en passant à la limite $\xi_1 \to 0$, les relations

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} H^j_{\xi_1}(0, \dots 0) = \sum_{k=1}^{n} H^i_{\xi_k}(0, \dots 0)\, C_{k1} \quad (i = 1, \dots n)$$

En posant $t = \xi_1, = \dots = \xi_{p-1} = \xi_{p+1} \dots = \xi_n = 0$, $\xi_p \neq 0$ nous obtiendrons d'une façon analogue

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} H^j_{\xi_p}(0, \dots 0) \equiv \sum_{k=1}^{n} H^i_{\xi_k}(0, \dots 0)\, C_{kp} \quad (ip = 1, \dots n)$$

ce qui exprime que

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, \delta_{jp} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\, C_{kp} \qquad (ip = 1, \dots n)$$

c'est-à-dire

(9) $$c_{ip} = C_{ip}.$$

En raison de (9) et (6) nous aurons pour $c_{i_i} = s_i$ et $c_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ les identités

$$s_i H^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} H^i_{\xi_k}(t, \xi_1, \ldots \xi_n)\, s_k\, \xi_k$$

d'où il vient que pour tous les s_k on aura

$$\sum_{k=1}^{n} s_k \left\{ H^i_{\xi_k}(t, \xi_1, \ldots \xi_n)\, \xi_k - \delta_{ik} H^k(t, \xi_1, \ldots \xi_n) \right\} \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots n)$$

et par conséquent

$$H^i_{\xi_k}(t, \xi_1, \ldots \xi_n)\, \xi_k - \delta_{ik} H^k(t, \xi_1, \ldots \xi_n) \equiv 0$$

d'où

(10) $$H^i_{\xi_k}(t, \xi_1, \ldots \xi_n)\, \xi_k \equiv 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k$$

(11) $$H^i_{\xi_i}(t, \xi_1, \ldots \xi_n)\, \xi_i \equiv H^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n) \qquad (i = 1, \ldots n)$$

En s'appuyant sur (10) on conclut que $H^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n)$ *ne* dépend que de deux variables t et ξ_i, c'est-à-dire

(12) $$H^i(t, \xi_1, \ldots \xi_n) \equiv G^i(t, \xi_i) \qquad (i = 1, \ldots n)$$

d'où, en vertu de (11), on aura pour $\xi_i \neq 0$

$$G^i_{\xi_i}(t, \xi_i) \equiv \frac{G^i(t, \xi_i)}{\xi_i} \qquad (i = 1, \ldots n).$$

En considérant t comme un paramètre on voit que la fonction G vérifie l'équation linéaire

$$\frac{dy}{d\xi_i} = \frac{y}{\xi_i}$$

on aura donc

$$G^i(t, \xi_i) = G^i(t, \mathring{\xi}_i)\, e^{\int_{\mathring{\xi}_i}^{\xi_i} \frac{ds}{s}} = G^i(t, \mathring{\xi}_i) \frac{\xi_i}{\mathring{\xi}_i} \overset{df}{=} \omega_i(t) \cdot \xi_i$$

(13) $$G^i(t, \xi_i) = \omega_i(t)\, \xi_i.$$

De la continuité de $H^i\ t,\ _1,\ldots,\xi_n)$ et de relations (12) et (13) il s'ensuit que l'on aura partout

$$H^i(t,\xi_1,\ldots\xi_n)\equiv\omega_i(t)\,\xi_i\,. \tag{14}$$

$H^i_t(t,\xi_1,\ldots\xi_n)$ étant continue la dérivée $\omega_i'(t)$ existe et elle est continue. D'après (1) on aura

$$H^i_{\xi_i}(0,\ldots 0)=1$$

d'où, en vertu de la relation (14), il vient que

$$\omega_i(0)=1.$$

En posant $a_{ij}=\delta_{ij}$ et $H^i(t,\xi_1,\ldots\xi_n)=\omega_i(t)\,\xi_i$ dans la relation (4) on obtiendra

$$H^i(t,\xi_1,\ldots\xi_n)=H^i_t(t,\xi_1,\ldots\xi_n)+\sum_{lk=1}^{n}H^i_{\xi_k}(t,\xi_1,\ldots\xi_n)\,A_{kl}\,\xi_l$$

$$\omega_i(t)\,\xi_i=\omega_i'(t)\,\xi_i+\sum_{l=1}^{n}\omega_i(t)\,A_{il}\,\xi_l \qquad (i=1,\ldots n)$$

On aura donc pour $\xi_l=\delta_{il}$ $\qquad (l=1,\ldots n)$

$$\omega_i'(t)=\omega_i(t)\,(1-A_{ii}) \qquad (i=1,\ldots n)$$

En posant $\sigma_i=1-A_{ii}$ on aura

$$\omega_i(t)=\omega_i(0)\,e^{\sigma_i t} \qquad (i=1,\ldots n)$$

d'où il résulte que

$$\omega_i(t)=\omega_i(0)\,e^{\sigma_i t} \qquad (i=1,\ldots n)$$

c'est-à-dire

$$\omega_i(t)=e^{\sigma_i t} \qquad (i=1,\ldots n) \tag{15}$$

En s'appuyant sur (5), (9) et (15) on voit que

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}H^j(t,\xi_1,\ldots\xi_n)\equiv\sum_{kl=1}^{n}H^i_{\xi_k}(t,\xi_1,\ldots\xi_n)\,c_{kl}\,\xi_l$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\,\omega_j(t)\,\xi_j=\sum_{l=1}^{n}\omega_i(t)\,c_{il}\,\xi_l \qquad (i=1,\ldots n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\,\xi_j\,[\omega_j(t)-\omega_i(t)]\equiv 0 \qquad (i=1,\ldots n)$$

d'où il résulte que

$$\omega_j(t) \equiv \omega_i(t) \qquad (i, j = 1, \dots n)$$

c'est-à-dire

$$e^{\sigma_j t} \equiv e^{\sigma_i t} \equiv e^{\sigma t}$$

et par suite

$$H^i(t, \xi_1, \dots \xi_n) \equiv e^{\sigma t} \xi_i \qquad (i = 1, \dots n)$$

ce qui termine la démonstration de la formule (*).

COMPTES—RENDUS
DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE.
1. X. 1949 — 1. VII. 1950.

État de la Société.

L'état du Bureau Central de la Société ainsi que les états des Bureaux des Sections de Cracovie, Gdańsk, Lublin, Poznań et Varsovie étant les mêmes que dans la période précédente (voir Annales de la Societé Polonaise de Mathématique XXII, 1950, p. 273—275) nous nous bornons à publier l'état actuel de la Section de Wrocław.

Section de Wrocław.

Président de la Section: Prof. Dr. Władysław Ślebodziński.
Vice-Président de la Section: Prof. Dr. Edward Marczewski.
Secrétaire de la Section: Mgr. Abraham Götz.
Trésorier de la Section: Dr. Maria Nosarzewska.
Membre du Bureau de la Section: Prof. Dr. Bronisław Knaster.
Commision de Contrôle: Prof. Dr. Jerzy Słupecki, Prof. Dr. Hugo Steinhaus, Prof. Dr. Witold Wolibner.
Délégués à l'Assemblée Générale de la Société: Prof. Dr. Bronisław Knaster, Prof. Dr. Edward Marczewski, Prof. Dr. Jan Mikusiński, Mgr. Marceli Stark.
Suppléants des Délégués: Prof. Dr. Hugo Steinhaus, Prof. Dr. Władysław Ślebodziński, Dr. Stanisław Hartman, Prof. Dr. Jerzy Słupecki.

Comptes Rendus des Séances des Sections.

Section de Cracovie.

18. X. 1949. Krzyżański, M.: *Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur*. Rendiconti dell'Acad. Nazion dei Lincei, 1950.

25. X. 1949. Séance tenue à l'occasion du mois de l'amitié polono-soviétique avec les conférences sur

„l'Oeuvre des mathématiciens soviétiques" prononcées par:
L e j a, F.: *Fonctions analytiques,*
G o ł ą b, S.: *Géométrie,*
W a ż e w s k i, T.: *Equations différentielles,*
L e i t n e r, R.: *Didactique des mathématiques*

8. XI. 1949. L i t w i n i s z y n, J.: *A certain boundary problem of vibrating string* (à paraitre dans les Archives de Mécanique Appliquée, t. 2, fasc. 2).

9. XI. 1949. W e k u a, I. N.: *Quelques problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles du type elliptique.*

L'auteur a parlé de quelques résultats publiés dans son livre: *Nowyje metodv rieszenia elipticzeskich urawnienij,* Moskwa, 1950 (Nouvelles méthodes de solution des équations du type elliptique).

15. XI. 1949. L e j a, F.: *Sur le problème des coefficients des fonctions analytiques univalentes dans le cercle* Ann. Soc. Pol. Math., t. XXIII (1950), p. 69—78.

22. XI. 1949. W r o n a, W.: *On multivectors in the Riemannian space,* (à paraître dans le Casopis pro pěstování matematiky a fysiky).

29. XI. 1949. Z i e m n i c k i, J.: *Sur quelques applications de l'équation de la chaleur dans la technique de moteurs termiques à piston.*

6. XII. 1949. Č e c h, E.: *Affinités et homographies tangentes à une correspondance entre deux espaces linéaires. Application au problème de la classification affine et projective de telles correspondances.* Un exposé complet sera publié dans une série de Mémoires au Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.

13. XII. 1949. L e i t n e r, R.: *Sur une propriété des ensembles de diamètre transfini nul.* Ann. Soc. Pol. Math., t. XXIII.

10. I. 1950. W a ż e w s k i, T.: *Une généralisation de la notion du contingent et son rapport à un théorème sur les accroissements finis.* Bull. Int. de

l'Ac. Pol. des Sciences et des Lettres, séance du 5. XII. 1949.

17. I. 1950. Szarski, J.: *Sur les systèmes majorants d'équations différentielles.* Ann. Soc. Pol. Math., t. XXIII.

7. III. 1950. Hławiczka, S.: *The unity of the notion of the number, addition and multiplication based on the relational arithmetic.*

In the relational arithmetic-based on the notion (due to Newton) of the number as a relation between two quantities of the same kind the operations of addition and multiplication are defined in the following way:

$$p + r \overset{df}{=} |Q| \cdot p'Q/r'Q = s'Q$$
$$p \cdot r \overset{df}{=} |Q| \cdot p' \,/\, r'Q = s'Q$$

wherein Q is a quantity, P/R the relational product of two relations.

These definitions are valid for all kinds of numbers, as integers, retional, relative, real and complex numbers.

There exists in the relational arithmetic also a unique definition of a power:

$$p^r \overset{df}{=} r'p.$$

21. III. 1950. Leja, F.: *Sur le problème de Dirichlet dans le cas des données frontières discontinues n'admettant que deux valeurs différentes.*

Soit F la frontière d'un domaine plan, borné D simplemant connexe, $\varphi(z)$ une fonction réelle définie sur F n'admettant que deux valeurs différentes A et B et $\zeta^{(n)}$ un système de $n+1$ points différents quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ situes sur F.

Désignons par $L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})$ le polynome du degré n égal à 1 au point $z = \zeta_j$ et à 0 en d'autres points du système $\zeta^{(n)}$ et par $u_{m,n}(z, \zeta^{(n)})$, où m et $n = 1, 2 \ldots$, la somme

$$u_{m,n}(z, \zeta^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} |L^{(j)}(z, \zeta^{(n)})| \, e^{\varphi(\zeta_j) \cdot n/m}$$

se réduisant à $e^{\varphi(z) \cdot n/m}$ aux points du système $\zeta^{(n)}$. Désignons encore par $u_{m,n}(z)$ la borne inférieure de cette somme lorsque n étant fixe le système $\zeta^{(n)}$ varie sur F. Il est évident que la fonction $u_{m,n}(z)$ est positive dans

le plan entier et que $\log u_{m,n}(z)$ constitue une approximation de la fonction $\frac{n}{m}\varphi(z)$ sur F. On démontre que:

1° *Il existe dans l'ensemble $D+F$ la limite réitérée*

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{m}{n}\log u_{m,n}(z)\right]\right\}=u(z)$$

et on a $A\leqslant u(z)\leqslant\varphi(z)$ aux points de F.

2° *La fonction $u(z)$ est harmonique dans le domaine D, continue en ceux des points de F en lesquels $\varphi(z)$ est continue et on a $u(z)=\varphi(z)$ aux points de continuité de $\varphi(z)$.*

28. III. 1950. Ślebodziński, W.: *Sur la géométrie textile et les connexions affines* (à paraître dans les Prace Matematyczno-Fizyczne).

9. V. 1950. Ważewski, T.: *Remarques relatives au voyage scientifique en Tchécoslovaquie.*

23. V. 1950. Słupecki, J.: *Logique et l'enseignement des mathématiques.*

30. V. 1950. Leja, F.: *Une méthode nouvelle de résolution du problème de Dirichlet dans le plan.*

Soit F la frontière d'un domaine plan quelconque D contenant le point à l'infini dans son intérieur, $\varphi(z)$ une fonction réelle définie et continue sur F, Δ l'ensemble ouvert (supposé non vide) complémentaire à $D+F$ et $\zeta^{(n)}$ un système de points différents quelconques situés sur F.

Désignons par $V(\zeta^{(n)})$ le produit de toutes les distances mutuelles des points $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$, par λ un paramètre réel et par $V_\lambda(\zeta^{(n)})$ le produit

$$V(\zeta^{(n)})\cdot e^{-n\lambda\sum_{j=0}^{n}\varphi(\zeta_j)}$$

Lorsque le système $\zeta^{(n)}$ varie sur F le produit $V_\lambda(\zeta^{(n)})$ reste borné et atteint un maximum $V_{n\lambda}$. Soit

$$x^{(n)}=\left\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}\right\} \tag{1}$$

un système de $n+1$ points de F (dépendant de λ) en lequel $V_\lambda(x^{(n)})=V_{n\lambda}$. Formons la somme

$$F_n(z,\lambda)=\sum_{j=0}^{n}|L^{(j)}(z,x^{(n)})|\,e^{n\lambda\varphi(x_j^{(n)})} \tag{2}$$

où $L^{(j)}(z,x^{(n)})$, $j=0,1,\ldots n$, désigne le polynome de Lagrange du degré n égal à 1 au points $z=x_j^{(n)}$ et à 0 en d'autres points du système (1).

Il est clair que la somme (2) est positive dans le plan entier et qu'elle se réduit à $e^{n\lambda\varphi(z)}$ aux points du système (1) donc la fonction

$$(3) \qquad f_n(z, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \log \sqrt[n]{F_n(z, \lambda)}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

se réduit à $\varphi(z)$ aux points (1) et constitue une approximation de la fonction frontière $\varphi(z)$ sur F. Observons encore que l'ensemble Δ est une somme finie ou dénombrable des domaines simplement connexes disjoints et que la frontière de Δ est contenue dans F. On peut démontrer que:

1° *Dans l'ensemble* $\Delta + F$ *il existe la limite réitérée*

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\{ \lim_{n \to \infty} f_n(z, \lambda) \right\} = \Phi(z)$$

y satisfaisant à l'inégalité $m \leqslant \Phi(z) \leqslant M$, *où* m *et* M *sont les bornes de* $\varphi(z)$ *sur* F.

2° *La fonction* $\Phi(z)$ *est harmonique dans* Δ, *continue dans* $\Delta + F$ *et égale à* $\varphi(z)$ *sur* F.

Cette méthode de résolution du problème de Dirichlet dans le plan pour des domaines simplement connexes bornés quelconques peut être étendue à des domaines multiplement connexes.

6. VI. 1950. Discussion publique sur le sujet: *Pourquoi la connaissance des mathématiques supérieures est nécessaire pour enseigner les mathématiques élémentaires.*

7. VI. 1950. Egerváry, J.: *Sur le problème des trois corps.* Une partie de ces résultats est contenue dans le travail: *Sur une nouvelle solution particulière du problème des trois corps.* (Commentarii Math. Helvetici, t. 24, fasc. 1).

Section de Gdańsk.

17. X. 1949. Turski, St.: *Sur les résultats acquis par les mathématiciens soviétiques.*

21. X. 1949. Naleszkiewicz, J.: *Sur les méthodes de relaxation dans les mathématiques appliquées.*

22. I. 1950. Gołąb, St.: *Sur une généralisation des équations de Bonnet-Kowalewski dans l'espace à plusieurs dimensions.*

1. I. 1950. Pęczalski, M.: *Sur la rationalisation des mathématiques.*

Section de Lublin

2. VII. 1948. Biernacki. M.: *Sur une inégalité.*
19. XI. 1948. Ryll-Nardzewski, C.: *Sur quelques propriétés des corps convexes.*
3. XII. 1948. Biernacki, M.: *Sur les fonctions faiblement p-valentes.*
22. XII. 1948. Bielecki, A.: *Sur la définition des fonctions trigonométriques à l'aide des intégrales.*
21. I. 1949. Biernacki, M.: *Sur quelques propriétés des ovales.*
21. I. 1949. Biernacki, M.: *Differentialgeometrie de Rothe* (compte rendu bibliographique).
11. II. 1949. Ryll-Nardzewski, C.: *Sur un théorème de M. Ważewski.*
18. III. 1949. Bielecki, A.: *Sur la couverture du plan par des segments.*
18. III. 1949. Biernacki, M.: *Blaschke: Differentialgeometrie* (compte rendu bibliographique).
26. III. 1949. Krzyżański, M.: *Sur les méthodes de recherche des intégrales des équations linéaires du type elliptique discontinues sur le bord du domaine d'existence.*
14. V. 1949. Leja, F.: *Sur une méthode d'approximation des fonctions.*
14. V. 1949. Leja, F.: *Une démonstration nouvelle d'un théorème de la théorie des séries.*
1. X. 1949. Biernacki, M.: *Les principaux résultats obtenus par les mathématiciens de l'U. R. S. S.*

Le conférencier a exposé les résultats obtenus par le mathématiciens de l'U. R. S. S. dans différents domaines, en particulier dans la théorie des fonctions d'une variable réelle, des fonctions analytiques, de la théorie des ensembles, du calcul des probabilités et de la théorie des nombres.

18. XI. 1949. Krzyż, J.: *Sur une inversion du théorème de la moyenne* (à paraître dans les Annales Univ. M. Curie-Skłodowska, Lublin. vol. IV, 1950).

22. XI. 1949. Biernacki, M.: *Sur quelques inégalités* (à paraître dans les Annales Univ. M. Curie-Skłodowska, Lublin, vol. IV, 1950).

13. I. 1950. Jakóbczyk, F.: *Les fractions périodiques dans différents systèmes de numération* (à paraître dans les Annales Univ. M. Curie-Skłodowska, Lublin, vol. V).

20. I. 1950. Alexiewicz, A.: *Sur les vecteurs-fonctions.*

18. III. 1950. Leja, F.: *Sur les coefficients des fonctions analytiques univalentes dans le cercle.*

3. VI. 1950. Wrona, W.: *Sur une classification des espaces de Riemann.*

Le conférencier a indiqué une classification possible des espaces de Riemann, fondée sur les propriétés de la courbure scalaire d'une m-direction et des multivecteurs principaux en un point d'un espace de Riemann; ces propriétés ont fait l'objet de plusieurs publications antérieures du conférencier.

10. VI. 1950. Krzyżański, M.: *Sur un procès stochastique continu en relation avec l'équation de la chaleur* (à paraître aux Rendiconti dell'Accad. Nazionale dei Lincei).

23. VI. 1950. Tatarkiewicz, K.: *Sur la convexité des sphères dans l'espace de Banach et sur la meilleure approximation* (à paraître aux Ann. Soc. Pol. Math., voir aussi C. R. Ac. Sc. Paris 227).

Section de Łódź.

5. XI. 1949. Séance tenue à l'occasion du mois de l'amitié polono-soviétique avec les conférences sur *l'Oeuvre des mathématiciens soviétiques* prononcées par:

Krysicki, W.: *Calcul de probabilité et la statistique mathématique.*

Popruženko, J.: *Théorie analytique des nombres, théorie des ensembles et topologie.*

Charzyński, Z.: *Analyse fonctionnelle.*
Janowski, W.: *Théorie des fonctions analytiques.*

28. XI. 1949. Charzyński, Z. et Janowski, W.: *Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées* (à paraître dans les Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska vol. IV).

Soit $f(z)$ la fonction holomorphe univalente dans le cercle $|z| < 1$ de la forme

(1) $$f(z) = a_1 z + \ldots, \text{ où } a_1 > 0$$

pour laquelle

(2) $$|f(z)| < 1.$$

Considerons la famille

(3) $$F$$

de toutes les fonctions de la forme (1) assujetties à la condition (2) et la famille

(4) $$F_T$$

de toutes les fonctions appartenant à la famille (3), pour lesquelles

$$a_1 \geqslant T, \text{ où } 0 < T < 1.$$

Les auteurs donnent la généralisation des équations pour les fonctions extrémales obtenues par Z. Charzyński *).

Le résultat essentiel est compris dans le théorème suivant: Etant donnée une fonctionnelle réelle

(5) $$K(f)$$

définie dans la famille (3), différenciable en chaque point de la famille (4), dont la différentielle ne s'annule identiquement dans aucun point de la famille (4), chaque fonction extrémale (c. à. d. pour laquelle la fonctionnelle (5) atteint son maximum dans la famille (4)):

(6) $$w = f^* = f^*(z),$$

appartenant à la famille (4) remplit les conditions suivantes:

*) Z. Charzyński: „Sur les fonctions extrémales dans les familles de fonctions univalentes" à paraitre.

I. Il existe sur la circonférence

$$|z| = 1 \tag{7}$$

un arc ouvert

$$C \tag{8}$$

tel, que la fonction (6) reste analytique sur cet arc et le transforme en un arc

$$D \tag{9}$$

du cercle

$$|w| = 1 \tag{10}$$

II. On a pour chaque point z de C l'équation:

$$\left[z \frac{f^{*\prime}(z)}{f^*(z)} \right]^2 \mathfrak{M}\,[f^*(z)] = \mathfrak{N}(z) \tag{11}$$

où

$$\mathfrak{M}(w) \equiv D^* \left[\Psi \left(f^*(\zeta), \frac{1}{w} \right) \right] + \hat{D}^* [\Psi (\hat{f}^*(\zeta), w] - 2P^* \tag{12}$$

$$\mathfrak{N}(z) \equiv D^* \left[\Psi \left(\zeta . \frac{1}{z} \right) f^{*\prime}(\zeta) \right] + \hat{D}^* [\Psi(\zeta, z) \hat{f}^{*\prime}(\zeta)] - 2P^* \tag{13}$$

$$\Psi(w, \lambda) \equiv w \, \frac{1 + w\lambda}{1 - w\lambda}$$

$$\begin{cases} D^*(h) = L^*(h) - i\, L^*(hi) \\ \hat{D}^*(h) = L^*(h) + i\, L^*(hi) \end{cases} \tag{14}$$

$L^*(h)$ — la différentielle de la fonctionnelle (5) au point (6)

$$P^* = \underset{0 \leqslant y \leqslant 2\pi}{\text{Minim}} \frac{1}{2} \left\{ D^* \left[\Psi (f^*(\zeta), e^{-iy}) \right] + \hat{D}^* \left[\Psi (\hat{f}^*(\zeta), e^{iy}) \right] \right\}$$

En même temps ζ désigne la variable apparente de l'opération pour la distinguer de z, qui joue le rôle de paramètre.

III. Les fonctions (12) et (13) prennent sur la circonférence (10), respectivement (7) les valeurs réelles non négatives.

IV. Le premier coefficient du developpement de toute fonction extrémale (6) est égal à T.

Il en résulte les corollaires suivantes, utiles dans leurs applications.

Corollaire I. Si les propositions:

1° Il existe un domaine

(15) $$E$$

compris dans le cercle $|z| < 1$, dont la frontière contient un arc

$$C_1 \subset C$$

tel, qu'aucun point de cet arc n'est pas un point d'accumulation des points essentiels du complémentaire du domaine (15).

2° On peut étendre la différentielle de la fonctionnelle (5) à la famille linéaire G de toutes les fonctions méromorphes dans le cercle $|z| < 1$ qui ont des pôles tout au plus dans le domaine (15)

sont verifiées, alors l'équation (11) a lieu pour chaque $z \epsilon E$.

Corollaire II. Si les propositions:

1° Il existe un domaine fixe

(16) $$E^*$$

compris dans le cercle $|z| < 1$, dont la frontière contient la circonférence (7) et les points qui sont des points d'accumulation des points essentiels du complémentaire forment sur cette circonférence un ensemble non dense.

2° La différentielle de la fonctionnelle (5) prise au point quelconque de la famille (4) s'étend à la famille linéaire G^* de toutes fonctions méromorphes dans le cercle $|z| < 1$ dont les pôles sont situés tout au plus dans le domaine (16)

sont veritiées, alors l'équation (11) peut être établie pour chaque $z \epsilon E^*$.

16. I. 1950. Popruženko, J.: *Sur une méthode d'intégration des expressions irrationnelles du 2e degré.*

En s'appuyant sur la notion du polynome pair et impair, l'auteur a introduit un système des transformations qui nous permettent de présenter les irrationalité sous une forme rationnelle plus simple que celle que l'on obtient en appliquant les formules connues de l'Analyse classique.

Section de Poznań.

25. X. 1949. Orlicz, W.: *Sur les relations scientifiques polono-soviétiques.*

25. X. 1949. Alexiewicz, A.: *Les mathématiques dans l'Union Soviétique.*

8. XI. 1949. Butlewski, Z.: *Compte rendu du Congrès des mathématiciens polonais et tchécoslovaques à Prague (28 août — 4 septembre 1949).*
8. XI. 1949. Alexiewicz, A.: *Application of vector-valued functions to a differential equation.*
2. XII. 1949. Biernacki, M.: *On some inequalities.*
13. I. 1950. Jeśmanowicz, L.: *On the Cesaro means,*
31. III. 1950. Albrycht, J.: *The rule of l'Hospital for vector-valued functions* (à paraître dans Colloquium Mathematicum).
31. III. 1950. Alexiewicz, A. et Orlicz, W.: *Analytic vector-valued functions of a real variable* (à paraître dans les Studia Mathematica).
25. IV. 1950. Grużewski, A.: *The method of sequential analysis in mathematical statistics.*
5. V. 1950. Alexiewicz, A.: *Vector-valued functions of bounded variation* (à paraître dans les Studia Mathematica).
19. V. 1950. Alexiewicz, A. et Orlicz, W.: *Riemann integration of vector-valued functions* (à paraître dans les Studia Mathematica).
6. VI. 1950. Ryll-Nardzewski, C.: *The equipartition of sequences.*
17. VI. 1950. Ważewski. T.: *On the notion of asymptotic coencidency of integrals of differential equations.*
22. VI. 1950. Marczewski, E.: *On the ergodic theorems*

Section de Varsovie.

28. X. 1949. Séance tenue à l'occasion du mois de l'amitié polono-soviétique avec les conférences sur l'Oeuvre des mathématiciens soviétiques, prononcées par:
Kuratowski, K.: *Introduction générale,*
Sierpiński, W.: *Théorie des ensembles et fonctions réelles,*
Mazur, S.: *Analyse fonctionnelle,*

Borsuk, K.: *Topologie*,
Zarankiewicz, K.: *Théorie des nombres.*

25. XI. 1949. Jaśkowski, S.: *Sur une généralisation du théorème de Sturm dans la méthode de Tarski d'une décision dans l'algèbre.*

25. XI. 1949. Jaśkowski, S.: *Sur l'interprétation des propositions catégoriques dans le calcul des prédicats.*

2. XII. 1949. Mostowski, A.: *Sur la notion du produit dans la théorie de la décision.*

2. XII. 1949. Rasiowa, H.: *Sur une axiomatique du calcul des propositions.*

9. XII. 1949. Sikorski, R.: *On an analogy between measures and homomorphismus* (ces Annales, p.).

13. I. 1950. Altman, M.: *Sur les bases dans l'espace de Hilbert.*

20. I. 1950. Rasiowa, H. et Sikorski, R.: *A proof of the completeness theorem of Gödel* (à paraître dans les Fundamenta Mathematicae 37 (1950)).

20. I. 1950. Sikorski R.: *Topology in Boolean algebras* (Fundamenta Mathematicae 36 (1949), p. 165—206).

27. I. 1950. Sikorski, R.: *The integral in a Boolean algebra* (Colloquium Mathematicum 2 (1949), p. 20—26).

3. III. 1950. Altman, M.: *Sur la multiplication des séries abstraites.*

17. III. 1950. Zarankiewicz, K.: *Sur le théorème des quatre domaines* (après cette communication on a montré le film du Congrès des Mathématiciens Polonais et Tchécoslovaques à Prague).

14. IV. 1950. Sikorski, R.: *On some topological spaces of high potency* (à paraître dans les Fundamenta Mathematicae 37 (1950)).

28. IV. 1950. Neyman, J.: *Sur un théorème d'existence lié avec le problème de la vérification des hypothèses composées.*

5. V. 1950. Altman, M.: *Les anneaux* B_0.

12. V. 1950. Suszko, R.: *L'étude des fondements de mathématiques dans l'Union Soviétique.*

12. V. 1950. Łoś, J. et Ryll-Nardzewski, C.: *L'axiome du chóix et l'existence de mesures deuxvalentes dans l'algèbre de Boole.*
19. V. 1950. Sierpiński, W.: *Compte rendu du voyage scientifique en Italie.*
19. V. 1950. Ryll-Nardzewski, C.: *Sur une généralisation du theorème ergodique.*
2. VI. 1950. Sikorski, R.: *Sur une démonstration du théorème de Tychonoff-Čech.*
2. VI. 1950. Sierpiński, W.: *Sur les nombres de la forme* 2^n (à paraître dans les Ann. Soc. Pol. Math.).
2. VI. 1950. Marczewski, E.: *Sur quelques applications du théorème ergodique.*

Section de Wrocław*)

14. X. 1949. Łoś, J.: *Sur les fondements de la probabilité.*
21. X. 1949. Steinhaus, H.: *La Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique depuis le 20 octobre 1945 jusqu'au 21 octobre 1949.*
21. X. 1949. Ślebodziński, W.: *Sur les variétés à connexion semi-symétrique.*
21. X. 1949. Marczewski, E.: *Sur les fonctions équivalentes.*
28. X. 1950. Hartman, S.: *Sur une méthode d'estimation des sommes de Weyl pour les fonctions périodiques et presque périodiques.*
4. XI. 1949. Stark, M.: *La théorie des nombres en U.R.S.S.*
11. XI. 1949. Wolibner, W.: *Sur un polynome d'interpolation.*
11. XI. 1949. Mikusiński, J.: *Sur la notion de dérivée dans l'anneau algébrique.*
25. XI. 1949. Finkielstejn, L.: *Sur une propriété du produit de composition.*

---

*) Les résumés et les notices bibliographiques concernant les communications présentées dans les séances de la Section de Wrocław vont paraître dans le Colloquium Mathematicum II.

15. XI. 1949. Ryll-Nardzewski, C.: *Sur un théorème d'interpolation dans les espaces linéaires.*
2. XII. 1949. Marczewski, E.: *Remarques sur la mesure et sur la catégorie.*
2. XII. 1949. Łukaszewicz, J.: *Sur la structure granulaire du sol.*
13. XII. 1949. Cech, E.: *Sur un type de transformation de l'espace projectif à n dimensions.*
16. XII. 1949. Steinhaus, H.: *Sur le problème de Hajos.*
16. XII. 1949. Mikusiński, J. et Ryll-Nardzewski, C. *Sur le produit de composition.*
16. XII. 1949. Hartman, S.: *Remarques sur les points à coordonnées entières dans les translations successives d'un domaine.*
13. I. 1950. Perkal, J.: *Sur les sections transversales des troncs d'arbres.*
27. I. 1950. Ingarden, R.: *Sur l'espace des couleurs.*
24. II. 1950. Steinhaus, H.: *Une contribution à la nomographie.*
24. II. 1950. Ryll-Nardzewski, C.: *Un problème de l'équipartition.*
3. III. 1950. Wolibner, W.: *Sur les mouvements des corps friables.*
3. III. 1950. Zięba, A.: *Un théorème de la théorie de la poursuite.*
10. III. 1950. Ryll-Nardzewski, C.: *Sur le théorème ergodique.*
24. III. 1950. Wolibner, W.: *Sur les domaines de l'indétermination des fonctions analytiques aux points singuliers.*
31. III. 1950. Steinhaus, H.: *Remarques mathématiques au problème de la coagulation du sang.*
31. III. 1950. Ryll-Nardzewski, C.: *Théorème ergodique sur les fractions continues.*
14. IV. 1950. Marczewski, E.: *Le centre mathématique de Wrocław. 1945—1950* (rapport pour le Congrès Scientifique de Pologne).

21. IV. 1950. Ślebodziński, W.: *Sur la variété à connexion homographique.*
28. IV. 1950. Nowakowski, R.: *Sur la productivité laitière des vaches.*
28. IV. 1950. Steinhaus, H.: *Sur la variation des arcs.*
28. IV. 1950. Marczewski, E.: *Sur la translation des ensembles.*
5. V. 1950. Mostowski, A.: *Quelques nouveaux résultats concernant le problème de la décision.*
5. V. 1950. Rieger, L.: *La représentation du calcul fonctionnel dans une forme algébrique.*
12. V. 1950. Marczewski, E.: *Sur l'extension non-séparable et invariante de la mesure de Lebesgue.*
12. V. 1950. Hartman, S.: *Remarques sur les théorèmes asymptotiques concernant les fractions continues.*
12. V. 1950. Ryll-Nardzewski, C.: *Sur un théorème de A. Rényi.*
19. V. 1950. Katětov, M.: *Sur les algèbres de Boole.*
19. V. 1950. Knaster, B.: *Sur l'ensemble des extrémités d'une courbe.*
26. V. 1950. Mikusiński, J.: *Sur les systèmes des équations aux dérivées partielles dans les espaces abstraits.*
26. V. 1950. Katětov, M.: *Sur la dimension de l'espace métrique non-séparable.*
30. V. 1950. Egerváry, J.: *Sur la réduction symétrique du problème de trois corps.*
2. VI. 1950. Alexiewicz, A.: *L'intégration dans les espaces de Banach.*
6. VI. 1950. Steinhaus, H.: *Sur l'estimation statistique de la valeur.*
6. VI. 1950. Steinhaus, H.: *Sur les séries de Taylor.*
16. VI. 1950. Wolibner, W.: *Sur une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction analytique soit univalente.*
16. VI. 1950. Hartman, S.: *Sur les fractions continues.*

16. VI. 1950. Hartman, S.: *Remarques sur la relation généralisée de Parceval.*
23. VI. 1950. Moroń, Z.: *Sur l'allure asymptotique des intégrales des équations aux différences linéaires et non-homogènes.*
23. VI. 1950. Mikusiński, J.: *Sur l'équation de translation.*

Chronique et Publications.

L'Assemblée Générale et les Conférences des Mathématiciens Polonais.

Le 29 juin 1950 a eu lieu à Varsovie l'Assemblée Générale bienna'e de la Société Polonaise de Mathématique. L'assemblée a adopté les modifications suivantes du réglement de la Société:

1° L'année financière compte du 1 janvier au 31 décembre.

2° Les Assemblées Générales de la Société ont lieu tous les deux ans entre le 1e janvier et le 1e mars, après l'expiration des pouvoirs du Bureau Central de la Société.

3° Le président de cette section de la Société à laquelle appartient le président de la Société est membre du Bureau Central de la Société.

4° Les séances du Bureau Central ne sont valables qu'en présence d'au moins 4 membres de ce Bureau.

Les 14 et 15 juin 1950 a eu lieu à Wrocław une conférence consacrée à la statistique organisée par l'Institut Mathématique de l'État en collaboration avec la sous-section mathématique du Congrès de la Science Polonaise. A cette conférence ont participé 30 statisticiens polonais et 3 tchécoslovaques, on y a énoncé 15 communications sur les différents sujets concernant la statistique et ses applications. Dans une séance à part, tenue le 15 juin, on a discuté en vue d'une préparation au Congrès de la Science Polonaise, l'état actuel de la statistique polonaise et les projets de son développement dans l'avenir.

Le 29 juin 1950 a eu lieu une conférence des mathématiciens polonais consacrée à la discussion des résultats acquis dans les sciences mathématques polonaises, de leur état actuel et des projets de leur développement dans l'avenir. A cette conférence, organisée par la sous-section mathématique du Congrès de la Science Polonaise ont participé environ 60 mathématiciens. Après une discussion basée sur une conférence du professeur K. Borsuk, discussion à laquelle ont pris part plusieurs membres de la réunion, on a constaté que bien que les mathématiciens polonais ont obtenu des résultats remarquables dans certaines branches de mathématiques (théorie des ensembles, analyse fonctionnelle, topologie et des sujets analogues), d'autres branches (les mathématiques classiques et surtout les applications) sont cultivées d'une façon insuffisante en Pologne. Vu des besoins croissants de l'Etat et de l'économie nationale les mathématiciens polonais rencontreront des problèmes dont la résolution exigera un développement plus grand de l'analyse classique et surtout des branches ayant des applications directes.

Les changements personnels aux chaires des mathématiques dans les écoles supérieures polonais.

Dr. Stanisław Turski professeur de mathématiques à l'Ecole Polytechnique de Gdańsk a été nommé professeur de mathématiques à l'Ecole Polytechnique de Varsovie.

Doc. Dr. Mirosław Krzyżański a été nommé professeur de mathématiques à l'Ecole Polytechnique de Cracovie.

Doc. Dr. Andrzej Alexiewicz à été nomme suppléant de professeur de mathématiques à l'Université de Poznań.

Habilitations.

Université de Varsovie. Dr. Roman Sikorski. Dissertation: *Closure Algebras.* Fundamenta Mathematicae 36 (1949), p. 165—206.

Le Concours Olympique Mathématique.

Sur une proposition de M. le Ministre de l'Instruction Publique S. Skrzeszewski la Société Polonaise de Mathématique a organisé un concurs parmi les élèves des écoles secondaires appelé Concours Olympique Mathématique (Olimpiada Matematyczna). On a constitué le Comité Central du concours avec prof. dr. Stefan Straszewicz comme président et prof. dr. Kazimierz Zarankiewicz comme directeur du concours; d'autres membres du Comité Central étaient prof. dr. Edward Otto, A. M. Rusiecki, mgr. Olga Turska, mgr. Jan Szurek (représentant le Ministre de l'Instruction Publique) et M. Antoni Kosiński (représentant Z.A.M.P). On a constitué en outre des Comités Régionaux du Concours Olympique à Varsovie (le président prof. dr. W. Sierpiński), à Wrocław (le président prof. dr. W. Ślebodziński), à Cracovie (le président doc. dr. W. Wrona), à Poznań (le président doc. dr. A. Alexiewicz), à Lublin (le président prof. dr. M. Biernacki), à Łódź (le président prof. dr. J. Roliński).

Les buts du Concours Olympique sont les suivants: a) élever le niveau de l'instruction mathématique des lycéens, b) développer l'intérêt pour les sciences mathématiques, c) rechercher des individus particulièrement doués et faciliter leur études ultérieures. Voici l'organisation du concours qui contient trois phases: la I phase du concours dure 3 mois, pendant ces 3 mois le Comité Central envoie à chaque école secondaire polonaise tous les mois 4 problèmes. Les élèves doivent résoudre ces problèmes à domicile et déposer les solutions chez leurs professeurs de mathématiques qui les envoient aux Comités Régionaux du concours.

Les Comités Régionaux examinent les travaux reçus, les auteurs des meilleurs parmi ces travaux sont admis à la II phase du concours qui consiste en un examen écrit pendant lequel les élèves doivent résoudre de nouveaux problèmes. Cet examen est contrôlé et a lieu simultanément

dans les 6 villes-sièges des Comités Régionaux. Les travaux des élèves sont envoyés au Comité Central qui convoque à Varsovie les auteurs des meilleures solutions dans le but de participer à la III phase du concours qui consiste aussi en un examen écrit contrôlé. Le Comité Central examine ensuite les travaux de cette phase du concours et décide au sujet de l'attribution des prix.

Ceux qui ont gagné des prix en recoivent des attestations; ils ont le droit d'être admis, après le baccalauréat, aux Facultés des Sciences des Universités ou des Ecoles Supérieures Pédagogiques et à toutes les Facultés des Ecoles Polytechniques sans d'autre examen que celui de la Science au sujet de la Pologne et du monde contemporain; on leur garantit aussi, s'il y a lieu, des bourses de l'État pendant leurs études supérieures.

Les Concours Olympiques Mathématiques auront lieu tous les ans. Dans le I Concours Olympique Mathématique polonais 800 élèves ont participé à la I phase du Concours, 324 à la II phase et 58 à la III phase. 20 concurrents ont reçu des prix. Chacun des gagnants de ces prix a reçu une collection des livres d'enseignement supérieur de mathématiques et chaque professeur d'un élève gagnant le prix a reçu une récompense en argent.

Grâce au I Concours Olympique Mathématique polonais on a pu tirer de conclusions précieuses concernant l'enseignement dans les écoles secondaires; il y a lieu de considérer ce concours comme réussi.

Prix et distinctions scientifiques.

L'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres à Cracovie a accordé le prix scientifique annuel (pour l' an 1950) dans le domaine des sciences mathématiques et naturelles (Classe III) au prof. H. Steinhaus pour le mémoire: *Elementary Inequalities between the Expected Values of Current Estimates of Variance*, Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 312—321.

Les prix scientifiques annuels, fondés grâce à une subvention accordée par le Ministère de l'Instruction Publique pour les meilleurs travaux mathématiques publiés par les membres de la Société Polonaise de Mathématique au cours de deux années précédantes ont été accordés pour la cinquième fois le 29 juin 1950 à M. S. Gołąb (le prix de Zaremba, pour les travaux: *Sur la théorie des objets géométriques*, Ann. Soc. Pol. Math. XIX (1946), p. 7—35 et *Sur la théorie des objets géométriques*, Ann. Soc. Pol. Math. XX (1947), p. 10—27), à M. J. Mikusiński (le prix de Banach, pour les travaux *Sur les fondements du calcul opératoire*, Studia Mathematica XI (1949), p. 41—70 et *L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle*, Annales Universitatis M. Curie-Skłodowska II (1948), p. 1—48 et III (1949), p. 1—84) et à M. R. Sikorski (le prix de Mazurkiewicz, pour les travaux sur l'algèbre de Boole, à savoir: 1. *On the representation of Boolean algebras as fields of sets*, Fund. Math. 35 (1948), p. 247—256; 2. *On a generalization of theorems of Banach and Cantor-Bernstein*, Coll. Math. I_2 (1948), p. 140—144; 3. *A theorem on extension of homomorphisms*, Ann. Soc. Pol. Math. XXI (1948), p. 332—335; 4. *Sur les corps de Boole topologiques*, C. R. de l'Ac. des Sc. 226 (1948), p. 1675—1676; 5. *Sur la convergence des suites d'homomorphies*, C. R. de l'Ac. des Sc. 226 (1948), p. 1792—1793: 6. *On the inducing of homomorphisms by mappings*, Fund. Math. 36 (1949), p. 7—22; 7. *A theorem on the structure of homomorphisms*, Fund. Math. 36 (1949), p. 245—247; 8. *Closure algebras*, Fund. Math. 36 (1949), p. 165—206; 9. *The integral on a Boolean algebra*, Coll. Math. II_1 (1949), p. 20—26; 10. *On an unsolved problem from the theory of Boolean algebras*, Coll. Math. II_1 (1949), p. 27—29; 11. *Independent fields in cartesian products*, Studia Math. 11 (1949)).



